10. Movimientos periódicos - aplicaciones

Péndulo simple

Un péndulo simple es un sistema ideal consistente en un cuerpo de masa m suspendido por una cuerda indeformable sin masa. Si se empuja la masa fuera de su posición de equilibrio y luego se suelta, el péndulo comenzará a oscilar en un plano vertical bajo la acción de la gravedad.

Consideremos un péndulo de longitud ***l*** en cuyo extremo se encuentra un cuerpo de masa ***m***. Fuera de su posición de equilibrio, la cuerda forma un ángulo θ con la vertical. Las fuerzas que actúan sobre m son el peso ***w*** y la tensión ***T*** en la cuerda. El movimiento se realizará a lo largo de un arco del círculo de radio 1, de tal manera que podemos descomponer el peso en sus componentes radial (de magnitud mg cos θ) y tangencial (de magnitud mg sen θ). La componente radial provee la aceleración centrípeta necesaria para mantener a la masa moviéndose en un círculo. La componente tangencial es la fuerza restauradora que actúa sobre m obligándola a regresar a la posición de equilibrio.

F= $-mgsen\,\theta$

el signo menos nos indica que la fuerza F se opone a la dirección en que se incrementa θ.

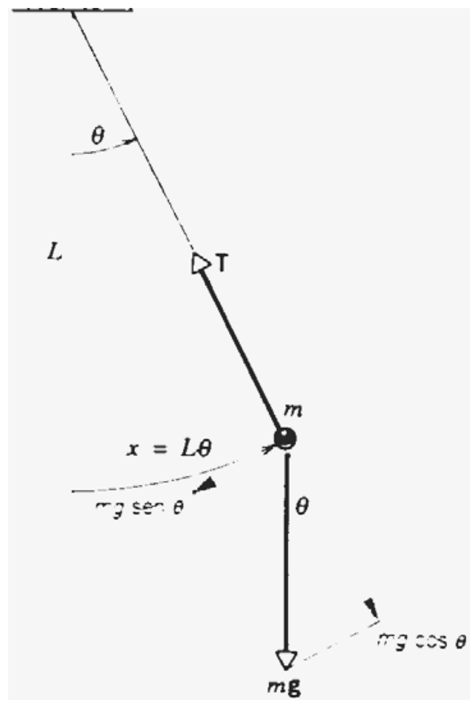

Figura 32. Péndulo simple, de longitud "L" y masa "m"

Es conveniente resaltar que la fuerza restauradora no es proporcional al desplazamiento angular θ sino a (sen θ). Consecuentemente el movimiento resultante no es estrictamente armónico simple. Sin embargo si el ángulo θ es pequeño, el seno de este ángulo es aproximadamente igual a θ medido en radianes. El desplazamiento a lo largo del arco es $x = l\theta$, de tal manera que para ángulos pequeños el movimiento es prácticamente en línea recta. Así que considerando sen $\theta \approx \theta$ (ver tabla adjunta)

Ángulo (°)	Ángulo (rad)	sen	% diferencia
1	0,01745329	0,01745241	0,0051
2	0,03490659	0,0348995	0,0203
3	0,05235988	0,05233596	0,0457
4	0,06981317	0,06975647	0,0813
5	0,08726646	0,08715574	0,1270
6	0,10471976	0,10452846	0,1830
7	0,12217305	0,12186934	0,2492
8	0,13962634	0,1391731	0,3257
9	0,15707963	0,15643447	0,4124
10	0,17453293	0,17364818	0,5095
11	0,19198622	0,190809	0,6170
12	0,20943951	0,20791169	0,7348
13	0,2268928	0,22495105	0,8632
14	0,2443461	0,2419219	1,0021
15	0,26179939	0,25881905	1,1515
16	0,27925268	0,27563736	1,3116
17	0,29670597	0,2923717	1,4825
18	0,31415927	0,30901699	1,6641
19	0,33161256	0,32556815	1,8566
20	0,34906585	0,34202014	2,0600

y sustituyendo en la fórmula para la fuerza, $F = -mg\theta$

$$F = -mg\,\frac{x}{l}$$

$$F = -(mg/l)\,x$$

Para pequeños desplazamientos, la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento y actúa en dirección opuesta, lo cual constituye el criterio básico del movimiento armónico simple y la ecuación anterior tiene la misma forma que $F = -kr$, siendo la constante k dada por el valor constante (mg/l). (Se pueden verificar las dimensiones de k y de mg/l).

Si queremos determinar el periodo de oscilación del péndulo simple cuando su amplitud es pequeña, sustituimos k por mg/l en,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/l}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Se puede observar que el período es independiente de la masa del péndulo.

Si la amplitud de la oscilación no fiese pequeña, el problema tendría que tratarse por medio de una integral de energía, esto es, se buscaría expresar la energía potencial asociada con la torca que genera la rotación del péndulo. Después, partiendo del hecho de que la energía mecánica se mantiene constante, generaríamos otra expresión integral, la cual tendría que ser evaluada en términos de funciones elípticas de tal manera que la expresión general para el periodo sería de la forma

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1+\frac{1}{2^2}\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2^2}\frac{3^2}{4^2}\,\mathrm{sen}^4\frac{\theta}{2}+\ldots\right)}$$

Nota: *Para una descripción completa del proceso ver K. R. Symon, Mechanics, Addison Wesley, sección 5.3.*