13. Hidrodinámica

El medidor de presión más simple es el manómetro de tubo abierto y consiste en lo siguiente: un tubo en forma de **U** contiene un líquido, comúnmente mercurio o agua; un extremo del tubo se conecta a un depósito que tiene una presión desconocida **p**. El otro extremo del tubo se encuentra abierto y esta a la presión atmosférica $p_0 = p_{atm}$ (Fig. 43a). La presión en el fondo de la columna izquierda es $p + \rho g y_1$ y la presión en el fondo de la columna derecha es $p + \rho g y_2$, donde ρ es la densidad del líquido dentro del manómetro. Las presiones en el fondo de los tubos son iguales, es decir,

$$p + \rho g y_1 = p_{atm} + \rho g y_2$$

$$p - p_{atm} = \rho g (y_2 - y_1)$$

$$\therefore \quad p - p_{atm} = \rho g y$$

En la ecuación anterior, **p** es la presión absoluta, y la diferencia $p - p_{atm}$ entre la presión absoluta y atmosférica es la presión manométrica. Por lo tanto, la presión manométrica es proporcional a la diferencia de alturas ($y_2 - y_1$) de las columnas de líquido.

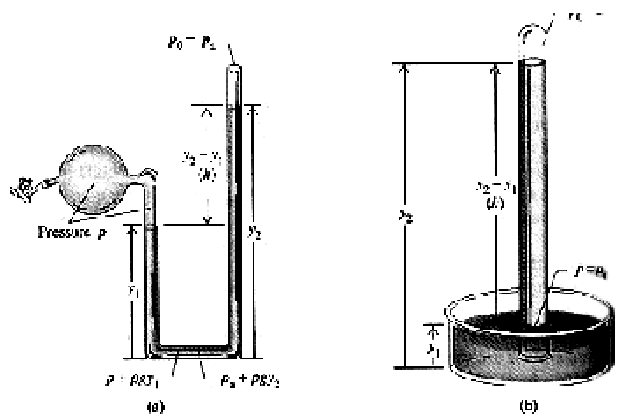


Figura 43. Medidores de presión: (a) Manómetro de tubo abierto. La presión p en el tanque, esto es la presión a la altura y_1 es igual a la presión atmosférica p_0 más la presión de la columna de altura $h = y_2 - y_1$. (b) Barómetro de mercurio. La presión atmosférica es función de la altura h 0 $y_2 - y_1$ de la columna.

Otro medidor de presión conocido es el barómetro de mercurio. Éste consiste de un tubo largo de vidrio, con mercurio en su interior, cerrado en uno de sus extremos. El tubo se invierte y se introduce dentro de un recipiente con mercurio (Fig. 43b), el nivel de mercurio bajará, dejando un espacio "vacío" (vapor de Hg) en la parte superior del tubo, tal que la presión en ese punto puede considerarse como nula.

$$p_{atm} = 0 + \rho g (y_2 - y_1)$$

$$p_{atm} = \rho g h$$

Por lo tanto, el barómetro de mercurio lee la presión atmosférica directamente de la altura de la columna de mercurio.

En el pasado, las presiones comúnmente se median en términos de la altura de la columna de mercurio, "pulgadas de mercurio" o "milímetros de mercurio". Ojo, estas densidades dependen de la densidad del mercurio, el cual varía con la temperatura y con el valor de **g**, que a su vez varía con la altura, por lo tanto, es conveniente utilizar el pascal como la unidad de presión.

Flotabilidad: principio de Arquímedes

La flotabilidad es un fenómeno familiar. Cuando un cuerpo es sumergido dentro del agua parece que pesa menos que cuando está en el aire y en general, cuando un cuerpo es menos denso que el fluido éste flota.

> **Principio de Arquímedes:** ***Cuando un cuerpo es sumergido parcial o completamente en un fluido éste ejercerá una fuerza hacia arriba sobre el cuerpo igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo.***

A continuación demostraremos el principio de Arquímedes utilizando el concepto de fuerza boyante o empuje.

Consideremos un cilindro de altura ***h*** *y tapas* de área **A**, que está sumergido por completo en un fluido de densidad ρ (Fig. 44). El fluido ejerce una presión $p_1 = \rho g y_1$ sobre la tapa superior del cilindro, entonces la fuerza que ejerce el fluido sobre el cilindro es $F_1 = p_1 A = \rho g y_1 A$. Haciendo el mismo análisis en la tapa inferior la presión y la fuerza que ejerce el fluido son respectivamente: $p_2 = \rho g y_2$ y $F_2 = p_2 A = \rho g y_2 A$. La fuerza neta debida a la presión del fluido, conocida como fuerza boyante o empuje, es igual a:

$$F_B = F_2 - F_1$$

$$F_B = \rho g A h$$

$$F_B = \rho g V$$

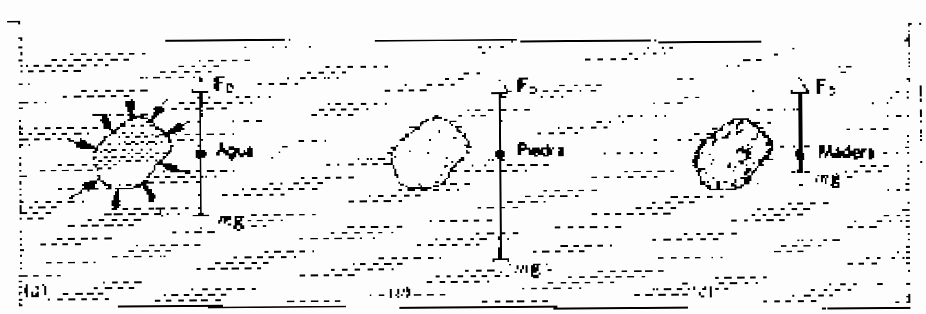


Figura 44. Objetos sumergidos por completo en un fluido de densidad ρ.

donde $\rho gV = mg$ es el peso del fluido que tiene un volumen igual al del cilindro. Por lo tanto, la fuerza boyante sobre el cilindro es igual al peso del fluido que desplaza el cilindro. (Demostración del principio de Arquímedes).

Tensión superficial

¿Qué tienen en común las siguientes situaciones? Un líquido sale de la extremidad de un gotero como una sucesión de gotas, y no como un chorro continuo. Un clip "flota" sobre una superficie de agua, aún cuando su densidad es varias veces la densidad del agua. Algunos insectos pueden caminar sobre la superficie del agua donde sus patas hacen deformaciones en la superficie pero no la penetran. En todos estos ejemplos la superficie del líquido pareciera estar bajo *tensión.*

Ahora realicemos el siguiente experimento; amarremos un rizo de hilo a un alambre en forma de anillo, introduzca el anillo y el hilo dentro de una solución jabonosa y agite hasta formar una película delgada del líquido en la cual flota el hilo (Fig. 45a). Cuando pinchamos la película dentro del rizo, el hilo se estirará en forma circular (Fig. 45b) ya que la tensión de la superficie del líquido empujará radialmente hacia afuera sobre éste.

La tensión superficial γ en una película se define como el cociente de la fuerza superficial F entre la longitud d sobre la cual actúa la fuerza.

$$\gamma = \frac{F}{d}$$

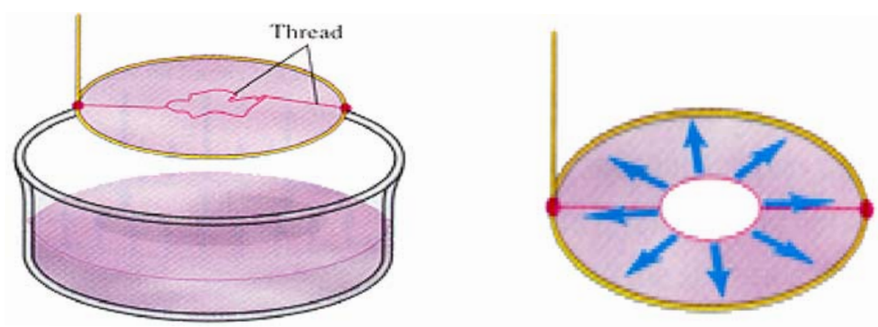


Figura 45: Un alambre en forma de anillo tiene amarrado un pedazo de hilo en forma de rizo, sumergido en una solución jabonosa (a) antes y (b) después de pincharse la película dentro del rizo.

La tensión superficial es hoy en día uno de los conceptos de la física del continuo, que es objeto de estudio concienzudo por sus múltiples aplicaciones industriales (e.g. coloides, mojado, formación de burbujas, espumas, etc.)

Figura 46. Un clip "flota" sobre una superficie de agua, aún cuando su densidad es varias veces la densidad del agua.

Hidrodinámica

• Flujo de un fluido

En esta sección se tomará en cuenta el *movimiento* del fluido. El flujo de un fluido puede ser extremadamente complejo, como se puede ver en la corriente de un río "crecido" n el movimiento, ó en el movimiento de la flama de una vela. A pesar de esto, algunas situaciones se pueden representar por modelos idealizados relativamente simples. Un fluido ideal es un fluido cuyo flujo es incompresible y no tiene fricción interna o viscosidad. La suposición de incompresibilidad usualmente es una buena aproximación para líquidos y puede aplicarse a gases siempre y cuando la diferencia de presión de una región a otra no sea grande. Cuando se desprecia la viscosidad, no se toman en cuenta los esfuerzos cortantes producidos por fuerzas de fricción internas, de capas adyacentes del fluido que se mueven una relativa a la otra.

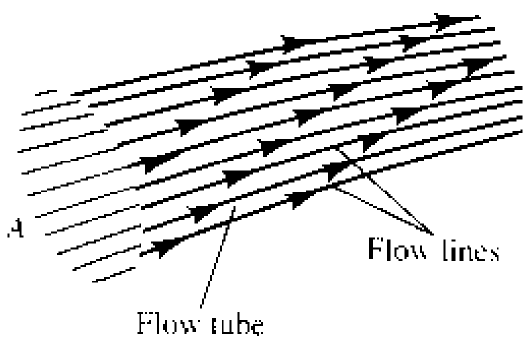


Figura 47. Un tubo de flujo limitado por líneas de flujo.

La trayectoria de una partícula en un fluido en movimiento se conoce como línea de.flijo. Si toda la configuración del flujo no cambia con el tiempo se le conoce como flujo estacionario. En un flujo estacionario, cualquier elemento que pasa a través de un punto dado seguirá la mima línea de flujo. Las líneas de flujo que pasan de un extremo a otro del borde de un elemento de área imaginario A formarán un tubo llamado tubo de flujo (Fig. 47). Si dichas líneas de flujo son siempre equidistantes, se dice que el flujo es incompresible.

Cuando las capas adyacentes de un fluido resbalan suavemente sin producir esfuerzos cortantes, se dice que el flujo es laminar. De lo contrario, si los cambios en el fluido son suficientemente grandes, o las superficies de frontera producen cambios de velocidad, el flujo se hace irregular y caótico; éste es llamado flujo turbulento. La transición del flujo laminar al turbulento es uno de los tópicos más sofisticados de la hidrodinámica por sus múltiples aplicaciones. Es un ejemplo típico de una transición de fase fuera de equilibrio y su formulación matemática precisa sigue siendo, hasta hoy, un problema abierto.

• Ecuación de continuidad (conservación de masa)

Supongamos que el flujo de un río con anchura constante es el mismo a lo largo de cierta longitud, entonces el agua deberá correr más rápido en la superficie del río que en las partes profundas. A continuación explicaremos está situación.

Hidrodinámica

En el siguiente análisis se considerarán solamente *flujos incompresibles. Si un flujo es incompresible puede demostrarse que su densidad no varía con el tiempo, pero puede depender de la posición.* Esto no ocurre si además el fluido es incompresible. La figura 49 muestra una porción de un tubo de flujo entre dos secciones transversales con áreas A_1 y A_2. Las velocidades del fluido en esas secciones son υ_1 y υ_1. La distancia que se ha movido el fluido en A_1 durante un pequeño intervalo de tiempo dt es $\upsilon_1 dt$. El elemento de volumen dV_1, que fluye dentro de la sección transversal A_1 durante éste intervalo es igual al fluido contenido en un elemento cilíndrico de base A_1 y altura $\upsilon_1 dt$: $d\upsilon_1 = A_1\upsilon_1 dt$. Si la densidad del fluido es ρ, la masa que fluye dentro del tubo dm_2 es $A_1\upsilon_1 dt$. Similarmente, la masa dm_2, que fluye a través de A_2, en el mismo tiempo es dm_2. En un flujo estacionario la masa total en el flujo es constante, es decir, $dm_1 = dm_2$

$$\rho A_1\upsilon_1 dt = \rho A_2\upsilon_2 dt$$
$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$$

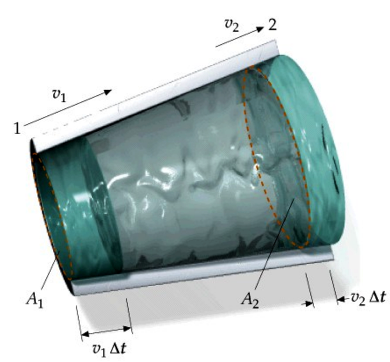


Figura 48. Se muestra una porción de un tubo de flujo entre dos secciones transversales con áreas A_1 y A_2, tal que $rA_1u_1dt = rA_2u_2dt$.

El producto $A\upsilon$ se le conoce como *tasa de flujo de volumen o "gasto volumétrico"*, es decir, el ritmo al cual un cierto elemento de volumen de fluido dV cruza una sección del tubo:

$$\frac{dV}{dt} = A\upsilon$$

Regresando a la ecuación puede verse que la tasa de flujo de volumen permanece constante a lo largo de cualquier tubo de flujo. Entonces, cuando la sección transversal de un tubo de flujo decrece, la rapidez del fluido aumenta.

Con este resultado se puede explicar por qué en la superficie de un río la corriente tiene una rapidez mayor que la parte más profunda; la superficie es el lugar donde se tiene la sección transversal más pequeña, por lo tanto, la corriente será más rápida que en la parte más profunda del río, sin embargo, la tasa de flujo de volumen es la misma en ambos lugares. Por ejemplo, si un tubo de agua de 2 cm de diámetro se conecta a un tubo de 1 cm de diámetro, la rapidez del flujo será cuatro veces más grande en la parte de 1 cm que en la parte de 2 cm.

La *tasa de flujo de masa dm/dt,* es el flujo de masa por unidad de tiempo a través de cualquier sección transversal, igual a la densidad ρ multiplicada por la tasa de flujo de volumen *dV/dt:*

$$\frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt}$$

Ahora podemos generalizar para el caso en el cual el fluido no es incompresible. Si p_1 y p_2 son las densidades en las secciones transversales 1 y 2, tendremos que de la primera ecuación de esta sección:

$$\rho_1 A_1 \upsilon_1 = \rho_2 A_2 \upsilon_2$$

• Ecuación de Bernoulli

De acuerdo a la ecuación de continuidad, la rapidez del flujo del fluido puede variar a lo largo de la trayectoria del fluido; también se sabe que la presión puede variar dependiendo de la altura como se vio en el caso estático; de la rapidez del flujo. Entonces, sería conveniente tener una ecuación que nos relacionará la presión, la rapidez del flujo y la altura para el flujo de un fluido ideal.

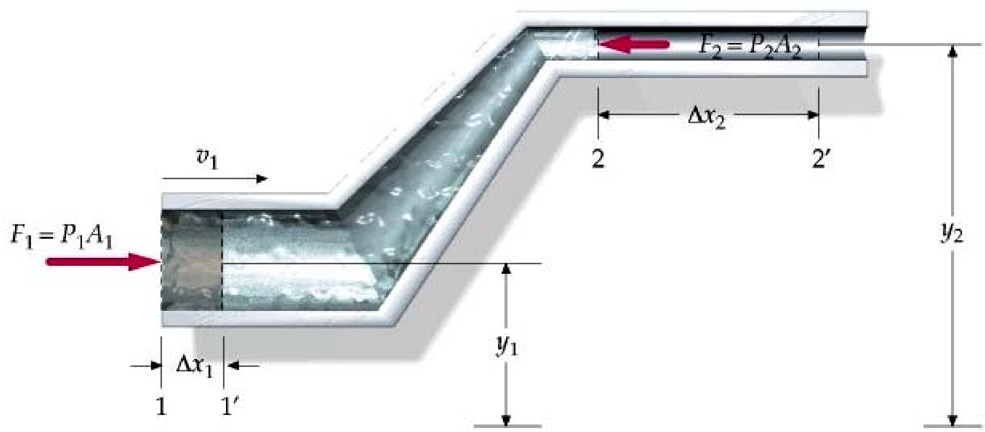
La dependencia de la presión con la rapidez esta dada por la $A_1\upsilon_1 = \rho A_2\upsilon_2$. En un flujo incompresible el fluido que fluye a lo largo de un tubo de flujo con sección transversal variable, su rapidez cambia. Por lo tanto, cada elemento del fluido deberá tener una aceleración, la fuerza que causa esta aceleración será aplicada al fluido que lo rodea.

Esto significa que la presión debe ser diferente en diferente regiones. Cuando la rapidez del elemento del fluido aumenta, quiere decir que éste se esta moviendo de una región de alta presión a una región de baja presión. Cuando la sección transversal de un tubo de flujo varía, la presión debe variar a lo largo del tubo aún cuando no exista diferencia de altura. Si la elevación cambia, esto ocasionará una diferencia de presión adicional.

Para deducir la ecuación de Bernoulli, apliquemos el teorema de Energía Trabajo a un fluido en una sección de un tubo de flujo. En la Fig. 49 se tiene a un fluido que en un tiempo inicial está entre dos secciones transversales *a* y *c*. La rapidez en la parte inferior es υ_1 y la presión es p_1.

En un pequeño intervalo de tiempo *dt* el fluido que está inicialmente en **a** se mueve hacia **b**, una distancia $ds_1 = \upsilon_1 dt$. En ese mismo intervalo de tiempo el fluido que está inicialmente en **c** se mueve a **d**, una distancia $ds_2 = v_2 dt$.

Las áreas de las dos secciones transversales finales son A_1 y A_2. De la ecuación de continuidad sabemos que el volumen del fluido *dV* que pasa a través de cualquier sección transversal durante el tiempo *dt,* es $dV = A_1 ds_1 = A_2 ds_2$.



(a)

Figura 49. trabajo neto realizado por la presión es igual al cambio en la energía cinética más el cambio en la energía potencial gravitacional.

Calculemos el trabajo realizado sobre este fluido durante *dt.* La fuerza total sobre la sección transversal en a es p,A, y la fuerza en c es p_2A_2 donde p_1 y p_2 son las presiones en las dos extremidades. el trabajo neto *dW* realizado sobre el elemento durante este desplazamiento es:

$$dW = p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2$$

$$dW = (p_1 - p_2) dV$$

El signo negativo del segundo término es debido a que la fuerza en **c** está en dirección opuesta al desplazamiento.

Igualemos este trabajo al cambio de energía total, cinética y potencial, para el elemento del fluido. La energía entre las secciones *b* y *c* no cambia. al inicio del intervalo de tiempo *dt* el fluido entre *a* y *b* tiene un volumen $A_1 ds_1$ masa $\rho A_1 ds_1$ y energía cinética $\frac{1}{2}\rho(A_1 ds_1)v_1^2$. De forma similar, al final del intervalo de tiempo *dt,* el fluido entre *c* y *d* tiene una energía cinética $\frac{1}{2}\rho(A_2 ds_2)v_2^2$. El cambio neto en la energía cinética *dK* durante el tiempo *dt* es:

$$dK = \frac{1}{2}\rho dV \ (v^2_2 - v_1^{\,2})$$

Por otro lado, la energía potencial para la masa entre *a* y *b* al principio de *dt* es $dmgy_2 = \rho dVgy_2$. La energía potencial para la masa entre c *y d* al final de *dt* es *dmgy2 = pdVgv,*. El cambio neto en la energía potencial *dU* durante *dt* es

$$dU = \rho dVg\,(y_2 - y_1)$$

Sustituyendo las ecs. en el teorema de Energía Trabajo *dW = dK + dU* obtenemos que,

$$(p_1 - p_2)\ dV = \frac{1}{2}\rho dV\,(v^2_2 - v_1^{\,2}) + \rho dVg\,(y_2 - y_1)$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v^2_2 - v_1^{\,2}) + \rho g(y_2 - y_1)$$

Esta es la ecuación de Bernoulli. Escrita en esta forma nos dice en un flujo incompresible, que el trabajo por unidad de volumen del fluido $(p_1 - p_2)$ es igual a la suma de los cambios de energías cinética y potencial por unidad de volumen que ocurren durante el flujo.

O puede interpretarse en términos de presiones. El segundo término del lado derecho es, la diferencia de presión causada por el peso del fluido y la diferencia de alturas de los extremos. En tanto que el primer término del lado derecho la diferencia de presión adicional asociado con el cambio de rapidez del fluido.

La ecuación se puede escribir como:

$$p_1 + \rho gy_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^{\,2} = p_2 + \rho gy_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^{\,2}$$

Los subíndices 1 y 2 se refieren a cualquiera dos puntos a lo largo de un tubo de flujo, entonces esta ecuación la podemos escribir como:

$$p + \rho gy + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante}$$

donde ρ es la densidad del fluido.