APÉNDICE 1, *LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DE LA ELIPSE*

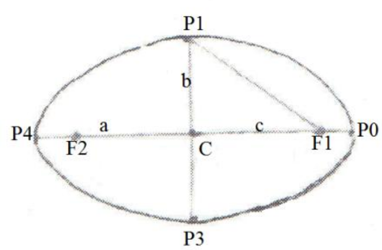
Algunas características de una elipse

¿Qué es una elipse? Explicaré primero cómo se puede dibujar una elipse, y luego daré la definición. Dibuja en una línea recta dos puntos, F_1 y F_2 que son *los focos* de la elipse, y en medio de estos dos puntos, *el centro* C de la elipse. Traza ahora, a través de C, perpendicular sobre la recta F_1F_2, una recta con dos segmentos iguales. CP_1 y CP_2. La distancia $b = CP_1 = CP_3$, se llama *el semi-eje menor* de la elipse. Traza ahora una recta desde C, a través de F_1 o F_2, de tal manera que el semi-eje mayor $a = F_1P_1 = F_2P_1 = CP_0 = CP_2$. La distancia del centro de la elipse a cada uno de sus focos, es $c = CF_1 = CF_2$. Así hemos encontrado cuatro puntos de la elipse, a saber, P_0, P_1, P_2 y P_3.

¿Cómo se encuentra cualquier otro punto, P_n, de la elipse? Por definición, sumando el primer radio variable $r_1 = F_1P_n$ más el segundo radio variable $r_2 = F_2P_n$, se obtiene la siguiente igualdad:

(1) $r_1 + r_2 = F_1P_n + F_2P_n = 2a$

Imagen.- La forma geométrica de una elipse



Por lo tanto, todos los puntos P_n de una elipse se encuentran, por definición, a distancias de F_1 y F_2, de tal manera que $F_1P_n + F_2P_n = 2a$. Por definición también, la excentricidad de una elipse es:

(2) $e = c / a$

Recordemos que $a = F_1P_1 = F_2P_1 = CP_0 = CP_2$, y $b = CP_1$ y $c = CF_1 = CF_2$. Por lo tanto, por la ley de Pitágoras:

(3) $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$

Combinando (2) y (3), obtenemos:

(4) $e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \dfrac{b^2}{a^2}$

de modo que:

(5) $e = \sqrt{1 - b^2 / a^2}$

Con base en la definición de r_1 , se definen tanto el radio mínimo:

(6) $r_{\min} = F_1 P_0 = a - c$,

así como el radio máximo:

(7) $r_{\max} = F_1 P_2 = a + c$

Combinando la ecuación (2) y (6), obtenemos:

(8) $r_{\min} = a - c = a - ea = a(1 - e)$

Y combinando (2) y (7), obtenemos:

(9) $r_{\max} = a + c = a + ea = a(1 + e)$

Si sumamos (8) y (9), obtenemos el mismo resultado expresado en la ecuación (1):

(10) $r_{\min} + r_{\max} = 2a$

Por definición. la constante p es igual a:

(11) $p = a(1 - e^2)$

De (11) se deduce que:

(12) $a = \dfrac{p}{(1 - e^2)}$

Combinando (8) y (12), y (9) y (12), respectivamente, obtenemos:

(13) $r_{\min} = \dfrac{p}{1 + e}$ y (14) $r_{\max} = \dfrac{p}{1 - e}$

La ecuación de una elipse con coordenadas cartesianas

Si tomamos como origen del sistema de coordenadas cartesianas el centro C de la elipse, se sigue que los focos F_1 y F_2 se encuentran en los puntos:

(15) $F_1 = (c,0)$ y $F_2(-c,0)$

Partimos de las definiciones de $r_1 = F_1 P_n$ y $r_2 = F_2 P_n$. Con base en estas definiciones y la ecuación (15), obtenemos las coordenadas cartesianas de P_n con respecto a F_1, a saber, $P_n = ([x_n - c], y_n)$ y con respecto a F_2 , a saber, $P_n = ([x_n + c], y_n)$. Por la ley de Pitágoras, estas coordenadas generan las siguientes magnitudes de r_1 y r_2. Para facilitar la anotación de las variables, a partir de aquí, $x = x_n$; y $y = y_n$.

(16) $r_1 = \sqrt{y^2 + (x-c)^2}$ y

(17) $r_2 = \sqrt{y^2 + (x+c)^2}$

Con base en la ecuación (1), obtenemos:

(18) $(r_1 + r_2)^2 = (2a)^2$, de modo que:

(19) $r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 = 4a^2$

Combinando (16), (17) y (19), obtenemos:

(20) $y^2 + (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + 2\sqrt{[y^2 + (x-c)^2][y^2 + (x+c)^2} = 4a^2$

$\Rightarrow 2y^2 + 2x^2 + 2c^2 + 2\sqrt{(y^2 + x^2 + c^2 - 2xc)(y^2 + x^2 + c^2 + 2cx)} = 4a^2$

$\Rightarrow 2a^2 - (y^2 + x^2 + c^2) = \sqrt{(y^2 + x^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2)}$

Llevando al cuadrado ambos términos de la ecuación (20), obtenemos:

(21) $4a^4 - 4a^2(y^2 + x^2 + c^2) + (y^2 + x^2 + c^2)^2 = (y^2 + x^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2$

y reagrupando los términos de (21). obtenemos:

(22) $x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Combinando las ecuaciones (3) y (22), obtenemos:

(23) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

y dividiendo los tres términos entre a^2b^2 , obtenemos *la ecuación de una elipse*:

(24) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

La ecuación del radio variable de una elipse en un sistema de coordenadas polares planas

Para transformar las coordenadas cartesianas x y y del punto P_n, cuyo origen es el centro C de la elipse, en las coordenadas polares planas x_p y y_p, cuyo origen es el foco F_1, hemos de realizar la siguiente transformación, calculando seno y coseno a partir del ángulo $\theta = P_nF_1\angle F_1P_0 = r_1\angle r_{\min}$.

(25) $x_p = (x-c) = r_1\cos\theta \Rightarrow x = r_1\cos\theta + c$

(26) $y_p = y = r_1 sen\theta$

Introduciendo las ecuaciones (25) y (26) en la (23), obtenemos:

(27) $(r_1\cos^2\theta + c^2 + 2cr_1\cos\theta)b^2 + a^2r_1^2 sen^2\theta = a^2 + b^2$

Reescribiendo la ecuación (27) corno un polinomio cuadrático, obtenemos:

(28) $r_1^{\ 2}(b^2\cos^2\theta + a^2 sen^2\theta) + r_1(2b^2 c\cos\theta) + b^2(c^2 - a^2) = 0$

Con base en la ecuación (3), sustituimos en el primer término b^2 por $(a^2 - c^2)$, y en el tercer término $(c^2 - a^2)$) por b^2, para obtener:

(29) $r_1^{\ 2}(a^2\cos^2\theta - c^2\cos^2\theta + a^2 sen^2\theta) + r_1(2b^2 c\cos\theta) - b^4 = 0$

y dado que:

(30) $\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$,

se sigue, combinando (29) y (30), que:

(31) $r_1^{\ 2}(a^2 - c^2\cos^2\theta) + r_1(2b^2 c\cos\theta) - b^4 = 0$

La solución de este polinomio cuadrático es:

(32) $$r_1 = \frac{-2b^2 c\cos\theta \pm \sqrt{4b^4 c^2\cos^2\theta + 4b^4(a^2 - c^2\cos^2\theta)}}{2(a^2 - c^2\cos^2\theta)}$$

Tomando en cuenta que de las dos opciones ±. hemos de optar por +, para que r_1 tenga un valor positivo, por ser una distancia, podemos simplificar (32) para obtener:

(33) $$r_1 = \frac{2(-b^2 c\cos\theta + b^2 a)}{2(a^2 - c^2\cos^2\theta)} = \frac{b^2(a - c\cos\theta)}{(a + c\cos\theta)(a - c\cos\theta)} = \frac{b^2}{(a + c\cos\theta)} = \frac{b^2 / a}{(1 + \frac{c}{a}\cos\theta)}$$

Combinando (4) y (11), obtenemos:

(34) $p = b^2 / a$

Recordando que, por definición, $e = c / a$ (ecuación 2) e introduciendo (2) y (34) en (33), obtenemos la ecuación del radio variable $r_1 = F_1 P_n$ de la elipse:

(35) $$r_1 = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

En el Apéndice II. se usará esta ecuación del radio variable de la elipse r_1 para expresarlo en términos de energía y momento angular. Para este fin, siguiendo a Kepler, se ubica el sol en el foco F_1 de la órbita elíptica del planeta. El radio variable r_1 es la distancia del Sol a la tierra. Al iniciar su órbita, el planeta se encuentra en el punto P_0, donde $\theta = 0$ y $\cos\theta = 1$, de modo que $r_{\min} = \frac{p}{1+e}$, como ya vimos en la ecuación (13). En cambio, cuando la tierra está en P_2, se encuentra a la distancia máxima del Sol, donde $\theta = 180^0$ ó $\theta = \pi$ (en grados ó radianes respectivamente) y $\cos\theta = -1$, de modo que $r_{\max} = \frac{p}{1-e}$, como ya vimos en la ecuación (14).