APÉNDICE VI. LA TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

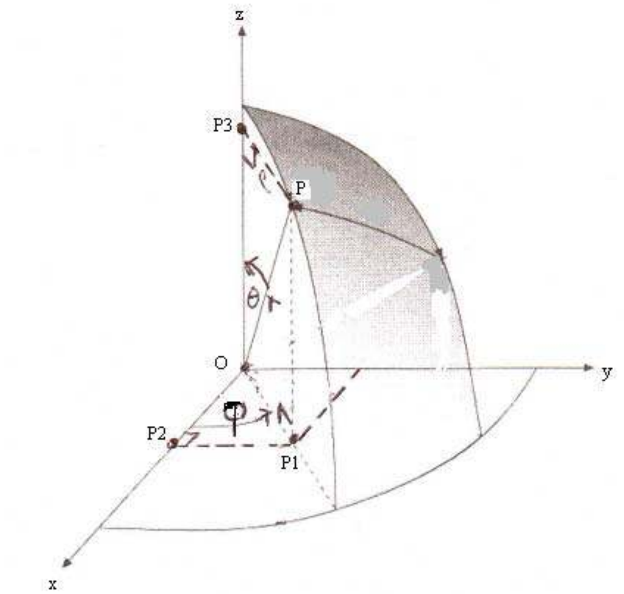
APÉNDICE VI A. LA CONSTRUCCIÓN DEL TENSOR MÉTRICO

El la elaboración de la teoría general sobre la independencia de las leyes físicas con respecto a los sistemas de coordenadas y la consecuente invarianza de estas leyes cuando un sistema de coordenadas se transforma en otro, ***el tensor métrico*** juega un papel importante. Este tensor $g_{\mu\nu}$ forma parte del tensor de Einstein[1733]. En esta sección quiero demostrar cómo se construye el tensor métrico a partir de dos ecuaciones, a saber, ***el tensor de transformación de diferenciales*** (que se usa en la transformación de sistemas de coordenadas) y la ecuación de ***la invarianza de la longitud de arco***. Primero se construyen estas dos ecuaciones y después el tensor métrico, a partir de ellas.

I. Coordenadas cartesianas y esféricas

Empezamos con un ejemplo relativamente sencillo de la transformación de un sistema de coordenadas cartesianas en un sistema de coordenadas esféricas.

Gráfica. Coordenadas cartesianas y esféricas de un punto en la superficie de una esfera



Las coordenadas cartesianas del punto P son $P(x,y,z) \equiv P(x^1, x^2, x^3)$. Además, $r = OP$; $\rho = P_3P = OP_1$. Los ángulos son: $\varphi = \forall(P_2OP_1)$ y $\theta = \forall(P_3OP)$. Las distancias OP_2, P_1P_2, OP_3 y $OP_1 = P_3P$ están dadas por: (a) $x^1 = \rho\cos\varphi$; (b) $x^2 = \rho\, sen\varphi$; (c) $x^3 = r\cos\theta$; (d) $\rho = r\, sen\theta$.

[1733] Ecuación 286, Apéndice VI B

De (a) y (d) obtenemos: (1) $x^1 = r\,sen\theta\cos\varphi$; de (b) y (d) obtenemos: (2) $x^2 = r\,sen\theta\,sen\varphi$; y de (c) obtenemos: (3) $x^3 = r\cos\theta$. El punto P en coordenadas esféricas es: $P(r\,sen\theta\cos\varphi, r\,sen\theta\,sen\varphi, r\cos\theta)$.

Por lo tanto el vector $\bar{r} = \overline{OP}$ en ***coordenadas cartesianas*** es:

(4A) $\bar{r} = x^1\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + x^3\hat{k}$

y en ***coordenadas esféricas***:

(4B) $\bar{r} = r\,sen\theta\cos\varphi\;\hat{\imath} + r\,sen\theta\,sen\varphi\;\hat{\jmath} + r\cos\theta\;\hat{k}$

II.A. Diferenciales

Derivando el vector (4) y deduciendo el diferencial de la derivada, obtenemos, para coordenadas cartesianas:

(5) $\dfrac{d\,\bar{r}_{cart}}{dx^i} = \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial x^3} \quad \overset{x^i = x,y,z}{\Longrightarrow}$

(5 B) $d\bar{r}_{cart} = \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial z}dz \quad \equiv d\bar{r}_{cart} = \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial x^1}dx^1 + \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial x^2}dx^2 + \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial x^3}dx^3$

y para coordenadas esféricas:

(6) $\dfrac{d\,\bar{r}_{esf}}{dq^i} = \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial r} + \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial\theta} + \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi} \quad \overset{q^j = r,\theta,\varphi}{\Longrightarrow}$

(6 B) $d\,\bar{r}_{esf} = \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial r}dr + \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial\theta}d\theta + \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi}d\varphi$

II.B. Transformación de los diferenciales de diferentes sistemas de coordenadas

Los dos diferenciales son iguales en cualquier sistema de coordenadas: $d\,\bar{r}_{cart} = d\,\bar{r}_{esf}$. Por lo tanto, ***transformando las coordenadas cartesianas en esféricas***, obtenemos:

(7) $dx^1 = \dfrac{\partial x^1}{\partial r}dr + \dfrac{\partial x^1}{\partial\theta}d\theta + \dfrac{\partial x^1}{\partial\varphi}d\varphi$

(8) $dx^2 = \dfrac{\partial x^2}{\partial r}dr + \dfrac{\partial x^2}{\partial\theta}d\theta + \dfrac{\partial x^2}{\partial\varphi}d\varphi$

(9) $dx^3 = \dfrac{\partial x^3}{\partial r}dr + \dfrac{\partial x^3}{\partial\theta}d\theta + \dfrac{\partial x^3}{\partial\varphi}d\varphi$

Resumiendo las ecuaciones (7), (8) y (9), obtenemos ***el tensor de transformación de diferenciales*** que es un tensor de primer rango y se puede escribir de las siguientes maneras:

(10A) $dx^i = \sum_j^3 \dfrac{\partial x^i}{\partial q^j}dq^j$;

la ecuación (10 A) también se escribe sin sigma:

(10 B) $dx^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial q^j} dq^j$;

y también de la siguiente manera:

(10C) $d\bar{r}(x^1, x^2, x^3) = \dfrac{\partial x^i}{\partial q^j} d\bar{r}(r, \theta, \varphi)$.

(NB $i = 1,2,3$; $j = 1,2,3$; $x^1 = x$; $x^2 = y$; $x^3 = z$; $q^1 = r$; $q^2 = \theta$; $q^3 = \varphi$)

III. El coeficiente métrico

Por la igualdad de (4A) y (4B) obtenemos el vector, que se puede expresar de diferentes maneras:

(11 A) $\bar{r} = r\,\hat{r} = |\bar{r}|\,\hat{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\;\hat{r} = x^1\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + x^3\hat{z} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

$= r\, sen\theta \cos\varphi\; \hat{\imath} + r\, sen\theta\, sen\varphi\; \hat{\jmath} + r\cos\theta\; \hat{k}$

de modo que la magnitud es:

(11 B) $\hat{r} = \dfrac{\bar{r}}{r} = sen\theta\cos\varphi\;\hat{\imath} + sen\theta\, sen\varphi\;\hat{\jmath} + \cos\theta\;\hat{k}$ (nota 1734)

Recordemos el tensor de transformación (ecuación 10):

(10) $dx^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial q^j} dq^j$

Podemos descomponer el tensor (10) en sus tres componentes y aplicar la igualdad representada por la ecuación (11):

(12) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} dq^1 \frac{\partial x^i}{\partial q^1} = \frac{\partial x^1}{\partial r} dr + \frac{\partial x^2}{\partial r} dr + \frac{\partial x^3}{\partial r} dr =$

$= sen\theta\cos\varphi\, dr + sen\theta\, sen\varphi\, dr + \cos\theta\, dr$

(13) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} dq^2 \frac{\partial x^i}{\partial q^2} = \frac{\partial x^1}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x^2}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x^3}{\partial \theta} d\theta =$

$= r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta + r\cos\theta\, sen\varphi\, d\theta - r\, sen\theta\, d\theta$

(14) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} dq^3 \frac{\partial x^i}{\partial q^3} = \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x^3}{\partial \varphi} d\varphi =$

$= -\, r\, sen\theta\, sen\varphi\, d\varphi + r\, sen\theta\cos\varphi\, d\varphi - 0\, d\varphi$

Llevamos (12), (13), y (14) al cuadrado:

[1734] George Arfken & Hans Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 4th edition (1996): 118

(15) $(dx^i)^2 = \left(\dfrac{\partial x^i}{\partial q^j}dq^j\right)^2 =$

$$= (sen^2\theta\cos^2\varphi + sen^2\theta\, sen^2\varphi + \cos^2\theta)(dr)^2$$
$$+ (r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\, sen^2\varphi + r^2\, sen^2\theta)(d\theta)^2$$
$$+ (r^2\, sen^2\theta\, sen^2\varphi + r^2\, sen^2\theta\cos^2\varphi)(d\varphi)^2 \quad \Rightarrow$$

(16) $(dx^i)^2 = 1(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 sen^2\theta(d\varphi)^2$

La ecuación (16) nos da el cuadrado del diferencial en el caso de las coordenadas esféricas. El término antes del diferencial cuadrado se llama ***coeficiente métrico*** $\bar{g}_{ii}$.

Por lo tanto:
(17) $\bar{g}_{11} = 1;\quad \bar{g}_{22} = r^2;\quad \bar{g}_{33} = r^2 sen^2\theta$

De (16) y (17), obtenemos:
(18) $(dx^i)^2 = \bar{g}_{11}(dr)^2 + \bar{g}_{22}(d\theta)^2 + \bar{g}_{33}(d\varphi)^2$

IV. Los vectores tangentes y el factor de escala h_i

Recordemos (4B) $\bar{r} = r\, sen\theta\cos\varphi\,\hat{i} + r\, sen\theta\, sen\varphi\,\hat{j} + r\cos\theta\,\hat{k}$

Los tres ***vectores tangentes*** $\partial\bar{r}/\partial q^j$ en cada punto de la esfera son:

(19) $\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial r} = sen\theta\cos\varphi\,\hat{i} + sen\theta\, sen\varphi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}$

(20) $\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\varphi\,\hat{i} + r\cos\theta\, sen\varphi\,\hat{j} - r\, sen\theta\,\hat{k}$

(21) $\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi} = -r\, sen\theta\, sen\varphi\,\hat{i} + r\, sen\theta\cos\varphi\,\hat{j} - 0\,\hat{k}$

Estos vectores tangentes permiten calcular ***el factor de escala*** h_i, que es ***la magnitud del vector tangente***.

(22) $h_j = \left|\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial q^j}\right| \qquad (j = 1,2,3) \quad \Rightarrow$

(23) $h_1 = \sqrt{(sen^2\theta\cos^2\varphi + sen^2\varphi\, sen^2\theta + \cos^2\theta)} = \sqrt{sen^2\theta(1) + \cos^2\theta} = \sqrt{1} = 1$

(24) $h_2 = \sqrt{r^2(\cos^2\theta\cos^2\varphi + sen^2\varphi\cos^2\theta + sen^2\theta)} = \sqrt{r^2(\cos^2\theta + sen^2\theta)} = \sqrt{r^2} = r$

(25) $h_3 = \sqrt{(r^2 sen^2\theta\, sen^2\varphi + r^2\cos^2\varphi\, sen^2\theta)} = \sqrt{r^2 sen^2\theta(1)} = r\, sen\theta$

Recordemos el ***coeficiente métrico*** $\bar{g}_{ii}$:

(17) $\overline{g}_{11} = 1; \quad \overline{g}_{22} = r^2; \quad \overline{g}_{33} = r^2 sen^2\theta$

En el caso de coordenadas ortogonales (cartesianas, esféricas, cilíndricas u otras), en donde $\overline{g}_{ij} = 0 \; (i \neq j)$ vemos, que el factor de escala es la raíz del coeficiente métrico:

(26) $h_i = \sqrt{\overline{g}_{ii}}$

Es fácil corroborar que los vectores tangentes (19 a 21) son ortogonales, dado que el producto escalar de estos vectores es cero:

(27) $\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial r} \bullet \dfrac{\partial \overline{r}}{\partial \theta} =$

$$= (sen\theta \cos\varphi \, \hat{\imath} + sen\theta \, sen\varphi \, \hat{\jmath} + \cos\theta \, \hat{k}) \bullet \; (r\cos\theta \cos\varphi \, \hat{\imath} + r\cos\theta \, sen\varphi \, \hat{\jmath} - r \, sen\theta \, \hat{k}) =$$

$$= r \, sen\theta \cos^2\varphi \cos\theta + r \, sen\theta \, sen^2\varphi \cos\theta - r\cos\theta \, sen\theta = 0$$

(28) $\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial r} \bullet \dfrac{\partial \overline{r}}{\partial \varphi} =$

$$= (sen\theta \cos\varphi \, \hat{\imath} + sen\theta \, sen\varphi \, \hat{\jmath} + \cos\theta \, \hat{k}) \bullet (-r \, sen\theta \, sen\varphi \, \hat{\imath} + r \, sen\theta \cos\varphi \, \hat{\jmath} - 0\hat{k}) =$$

$$= -r \, sen^2\theta \cos\varphi \, sen\,\varphi + r \, sen^2\theta \, sen\varphi \cos\varphi + 0 = 0$$

(29) $\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial \theta} \bullet \dfrac{\partial \overline{r}}{\partial \varphi} =$

$$= (r\cos\theta \cos\varphi \, \hat{\imath} + r\cos\theta \, sen\varphi \, \hat{\jmath} - r \, sen\theta \, \hat{k}) \bullet (-r \, sen\theta \, sen\varphi \, \hat{\imath} + r \, sen\theta \cos\varphi \, \hat{\jmath} - 0\hat{k}) =$$

$$= -r^2 \, sen\theta \, sen\varphi \cos\theta \cos\varphi + r^2 \, sen\theta \, sen\varphi \cos\theta \cos\varphi + 0 = 0$$

V. Los vectores tangentes unitarios

Los ***vectores tangentes unitarios*** se obtienen al dividir los vectores tangentes entre su magnitud, es decir:

(30) $\hat{e}_j = \dfrac{\partial \overline{r} / \partial q^j}{\left| \partial \overline{r} / \partial q^j \right|} = \dfrac{\partial \overline{r} / \partial q^j}{h_j} \quad (j = 1,2,3)$

De (30) se corrobora que el vector tangente equivale el producto del vector tangente unitario y la magnitud del vector tangente:

(31) $\partial \overline{r} / \partial q^j = \hat{e}_j h_j$

Por lo tanto:

(32 A) $\hat{e}_1 =$

$$= (sen\theta \cos\varphi \, \hat{\imath} + sen\theta \, sen\varphi \, \hat{\jmath} + \cos\theta \, \hat{k}) / \sqrt{(sen^2\theta \cos^2\varphi + sen^2\varphi \, sen^2\theta + \cos^2\theta)} =$$

$$= (sen\theta \cos\varphi \, \hat{\imath} + sen\theta \, sen\varphi \, \hat{\jmath} + \cos\theta \, \hat{k}) / \sqrt{1} \Rightarrow$$

(32 B) $\hat{e}_1 = \hat{e}_r = sen\theta \cos\varphi \, \hat{\imath} + sen\theta \, sen\varphi \, \hat{\jmath} + \cos\theta \, \hat{k}$

(33 A) $\hat{e}_2 =$

$$= r\cos\theta\cos\varphi\,\hat{\imath} + r\cos\theta\, sen\varphi\,\hat{\jmath} - r\, sen\theta\,\hat{k} \,/\, \sqrt{r^2(\cos^2\theta\cos^2\varphi + sen^2\varphi\cos^2\theta + sen^2\theta)} =$$
$$= r\cos\theta\cos\varphi\,\hat{\imath} + r\cos\theta\, sen\varphi\,\hat{\jmath} - r\, sen\theta\,\hat{k} \,/\, \sqrt{r^2} \;\Rightarrow$$

(33 B) $\hat{e}_2 = \hat{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\imath} + \cos\theta\, sen\varphi\,\hat{\jmath} - sen\theta\,\hat{k}$

(34 A) $\hat{e}_3 =$

$$= - r\, sen\theta\, sen\varphi\,\hat{\imath} + r\, sen\theta\cos\varphi\,\hat{\jmath} - 0\,\hat{k} \,/\, \sqrt{(r^2 sen^2\theta\, sen^2\varphi + r^2\cos^2\varphi\, sen^2\theta)} =$$
$$= - r\, sen\theta\, sen\varphi\,\hat{\imath} + r\, sen\theta\cos\varphi\,\hat{\jmath} - 0\,\hat{k} \,/\, \sqrt{r^2 sen^2\theta} \Rightarrow$$

(34 B) $\hat{e}_3 = \hat{e}_\varphi = -sen\phi\,\hat{\imath} + \cos\varphi\,\hat{\jmath}$

Es fácil corroborar que los vectores tangentes unitarios son ortogonales (ecuaciones 32, 33 y 34), análogamente a los vectores tangentes:

(35) $\hat{e}_1 \bullet \hat{e}_2 = \cos^2\varphi\, sen\theta\cos\theta + sen^2\varphi\, sen\theta\cos\theta - sen\theta\cos\theta = 0$

(36) $\hat{e}_1 \bullet \hat{e}_3 = -sen\varphi\cos\varphi\, sen\theta + sen\varphi\cos\varphi\, sen\theta = 0$

(37) $\hat{e}_2 \bullet \hat{e}_3 = -sen\varphi\cos\varphi\cos\theta + sen\varphi\cos\varphi\cos\theta = 0$

VI. La invarianza de la longitud de arco

Supongamos que tenemos una línea curvada en el espacio. Llamamos s a la magnitud del arco, es decir, la distancia entre dos puntos en esta curva. El ***elemento de línea*** ds^2 es el cuadrado del diferencial de esta distancia. Recordemos las ecuaciones (5) y (6):

(38) $d\bar{r} = \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u^1}du^1 + \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u^2}du^2 + \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u^3}du^3$

Definimos el cuadrado del diferencial de la longitud de arco:

(39) $ds^2 = d\bar{r} \bullet d\bar{r}$

Combinando (38) y (39), obtenemos:

(40) $ds^2 = (\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u^1}du^1 + \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u^2}du^2 + \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u^3}du^3) \bullet (\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u^1}du^1 + \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u^2}du^2 + \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u^3}du^3) =$

$$= \frac{\partial\bar{r}}{\partial u^1}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^1}du^1du^1 + \frac{\partial\bar{r}}{\partial u^1}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^2}du^1du^2 + \frac{\partial\bar{r}}{\partial u^1}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^3}du^1du^3 +$$
$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^2}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^1}du^2du^1 + \frac{\partial\bar{r}}{\partial u^2}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^2}du^2du^2 + \frac{\partial\bar{r}}{\partial u^2}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^3}du^2du^3 +$$
$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^3}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^1}du^3du^1 + \frac{\partial\bar{r}}{\partial u^3}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^2}du^3du^2 + \frac{\partial\bar{r}}{\partial u^3}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^3}du^3du^3 \quad\Rightarrow$$

(41) $ds^2 = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}(\frac{\partial\overline{r}}{\partial u^p}\frac{\partial\overline{r}}{\partial u^q}du^p du^q) = g_{pq}du^p du^q$

Dado que la longitud de arco no depende del sistema de coordenadas, ds^2 es invariante en cualquier sistema de coordenadas:
(42) $ds^2 = d\overline{s}^2$

Combinando (41) y (42), obtenemos:
(43) $g_{pq}du^p du^q = \overline{g}_{mn}du^m du^n$

VII. El tensor métrico y la transformación de un sistema de coordenadas en otro

Queremos construir ***el tensor métrico*** que se representa por una ecuación tensorial de segundo rango. Esta *ecuación será válido parar la transformación de cualquier sistema de coordenadas en cualquier otro sistema de coordenadas* (sean sistemas de 9 componentes, sean de 16 componentes, sean de n componentes).

Se construye este tensor métrico a partir de la invarianza de la longitud de arco (apartado V) y las leyes de la transformación de diferenciales (apartado II).

Reescribimos la ecuación (43) como sigue:
(44) $g_{ab}dx^a dx^b = \overline{g}_{mn}d\overline{x}^m d\overline{x}^n$

Recordemos también el tensor de la transformación de diferenciales (ecuación 10):

(10) $d\overline{x}^m = \frac{\partial\overline{x}^m}{\partial x^p}dx^p$ & $d\overline{x}^n = \frac{\partial\overline{x}^n}{\partial x^q}dx^q$

Sustituimos la (10) en la (44):

(45) $g_{ab}dx^a dx^b = \overline{g}_{mn}\frac{\partial\overline{x}^m}{\partial x^p}\frac{\partial\overline{x}^n}{\partial x^q}dx^p dx^q$

Sustituimos los índices mudos p & q en el término al lado derecho por a & b respectivamente, para obtener:

(46) $g_{ab}dx^a dx^b = \overline{g}_{mn}\frac{\partial\overline{x}^m}{\partial x^a}\frac{\partial\overline{x}^n}{\partial x^b}dx^a dx^b \Rightarrow$

(47) $[g_{ab} - \overline{g}_{mn}\frac{\partial\overline{x}^m}{\partial x^a}\frac{\partial\overline{x}^n}{\partial x^b}]dx^a dx^b = 0$

Dado que $dx^a dx^b \neq 0$, de (47) se sigue que:

(48) $g_{ab} - \overline{g}_{mn}\frac{\partial\overline{x}^m}{\partial x^a}\frac{\partial\overline{x}^n}{\partial x^b} = 0 \Rightarrow$

(49) $g_{ab} = \bar{g}_{mn} \dfrac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^a} \dfrac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^b}$

En la ecuación (49) sustituimos x y g sin barra por $\bar{x}$ y $\bar{g}$ con barra, y vice-versa, y sustituimos los índices a y b por m y n, y m y n por a y b:

(50) $\bar{g}_{mn} = \dfrac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^m} \dfrac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^n} g_{ab}$

En los apartados IV y V, corroboramos que las coordenadas esféricas son ortogonales. Para la transformación de diferentes sistemas de coordenadas que sean ortogonales, el tensor métrico se simplifica, dado que $\bar{g}_{ij} = 0\ (i \neq j)$. A continuación reproduzco, a modo de ejemplo, las matrices de los coeficientes métricos de los sistemas de coordenadas cartesiano y esférico:

(51) $g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(52) $\bar{g}_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sen^2\theta \end{pmatrix}$

Por lo tanto, ***para sistemas de coordenadas ortogonales,***[1735] el tensor métrico representado por la ecuación (50) se reduce a la (53):

(53) $\bar{g}_{ii} = \left(\dfrac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \right)^2 g_{aa}$

[1735] Para nueve casos particulares de sistemas de coordenadas ortogonales, véase Murray Spiegel, *Análisis Vectorial* (2005): 137-141

APÉNDICE VI B. LA CONSTRUCCIÓN DE LA GEODÉSICA Y EL TENSOR DE EINSTEIN

por Juan Auping Birch con la asesoría de Alfredo Sandoval Villalbazo

En este apéndice presento la forma matemática de la teoría de la relatividad general de Einstein, en diez secciones:

A. LOS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

A 1. Observaciones previas

Primera observación: los índices

El cálculo tensorial, y en particular el tema de los símbolos de Christoffel implican el manejo de muchos índices, como dijo un amigo mío, "el cálculo tensorial es simplemente una compleja danza de índices", razón por la cual es conveniente primero formular algunas reglas que han de respetarse para no cometer errores:

a) Cada *índice libre* debe ocurrir, *una sola vez, en cada uno de los términos* de una ecuación, y *siempre en la misma posición* (covariante o contravariante).
b) Cuando *un índice mudo* ocurre *en un término* de la ecuación, asociado a diferentes factores del término, *ocurre dos veces, ni más, ni menos. La presencia de tres índices repetidos, asociados a tres diferentes factores del mismo término, lleva a una contradicción, como a continuación comprobaré*, además de ser inconsistente con la convención de índices mudos que se adopta comúnmente. Supongamos la siguiente expresión tensorial: $A^{\alpha\beta} B^{\alpha} B_{\alpha}$. Dado que $B^{\alpha} B_{\alpha} = b$ es un escalar, se sigue que: $A^{\alpha\beta} B^{\alpha} B_{\alpha} = A^{\alpha\beta} b$. Ahora bien, el término del lado izquierdo tiene un índice libre y un índice mudo asociado a los factores del término y, por lo tanto, es un vector (un tensor de primer rango), pero el término del lado derecho tiene dos índices libres y es, por lo tanto, un tensor de segundo rango, lo que implica contradicción.
c) Esto no quita que sí pueden existir tres índices mudos asociados a un mismo objeto, por ejemplo, $R^{\alpha\beta\gamma\delta}_{\alpha\beta\gamma\eta}$.
d) En caso de que el índice no implica una sumatoria, sí puede haber tres índices mudos asociados a tres factores de un mismo término, por ejemplo $a^1 b^1 c^1$.
e) *Cuando se sustituye un índice mudo en un término por otro, no necesariamente se hace la misma sustitución en los demás términos de la ecuación*.

Segunda observación: los tensores:

f) Los productos algebraicos de tensores son *conmutativos,* es decir, $A^{\alpha} B^{\beta} = B^{\beta} A^{\alpha}$
g) En toda ecuación tensorial se pueden cambiar las variables con barra por las variables sin barra y vice-versa y sigue siendo válida la ecuación.
h) Cuando pensamos en un tensor, deben constatarse tres cosas importantes:
1.- En qué espacio estamos. La convención es usar índices latinos en espacios de 2 o 3 dimensiones e índices griegos en un espacio-tiempo de 4 dimensiones.
2.- El rango del tensor. El rango depende del número de índices libres: un tensor de cero índices es un escalar; un tensor de un solo índice libre es un vector; un tensor de tres índices libres es un tensor de rango tres u orden tres, etcétera.
3.- Debe indicarse si es un tensor arbitrario, simétrico o anti-simétrico. El arbitrario es la suma de un simétrico y un anti-simétrico. Por ejemplo:

	$g_{\alpha\beta}$	T^{mn}	$T^{\mu\nu}$
	4 dim.=16 comp.	3 dim.=9 comp.	4 dim. = 16 comp.
Arbitrario	/	9 indep.	16 indep.
Simétrico	10 indep.+6 dep.	6 indep.+3 dep	10 indep.+ 6 dep.
Anti-simétrico	/	3 indep.+6 dep.	6 indep. + 10 dep.

Tercera observación: el tensor métrico es simétrico, es decir $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Prueba:

Recordemos que: $A^{\nu} A^{\mu} = A^{\mu} A^{\nu}$ (son conmutativas), por lo tanto:

(1) $(g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu}) A^{\nu} A^{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu} A^{\mu} - g_{\nu\mu} A^{\mu} A^{\nu}$

(2) $g_{\mu\nu} A^{\nu} = A_{\mu}$ & $g_{\nu\mu} A^{\mu} = A_{\nu}$

De (1) y (2) se obtiene:

(3) $(g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu}) A^{\nu} A^{\mu} = A_{\mu} A^{\mu} - A_{\nu} A^{\nu}$

De (2) y (3) se obtiene:

(4) $(g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu}) A^{\nu} A^{\mu} = A_{\mu} A^{\mu} - A^{\nu} A_{\nu} = A_{\mu} A^{\mu} - A_{\nu} A^{\nu} \underset{\nu=\mu}{=} 0 \Rightarrow$

(5) $g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu} = 0 \Rightarrow g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$

Cuarta observación:

En el Apéndice anterior derivé el tensor métrico para coordenadas cartesianas y esféricas y el ***tensor métrico universal*** (ecuación 24 del Apéndice VI A). Retomo aquí la parte del tensor métrico universal. La derivación de este tensor está basado en dos supuestos (a y b):

a) la invarianza de la longitud de arco:

(6) $(ds)^2 = (d\bar{s})^2 \Rightarrow g_{ab} dx^a dx^b = \bar{g}_{mn} d\bar{x}^m d\bar{x}^n$

b) las leyes de transformación de los diferenciales:

(7) $d\bar{x}^m = \dfrac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^p} dx^p$ & $d\bar{x}^n = \dfrac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^q} dx^q$

De (6) & (7) obtenemos:

(8) $g_{ab} dx^a dx^b = \bar{g}_{mn} \dfrac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^p} \dfrac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^q} dx^p dx^q \Rightarrow$

Uno debe tener cuidado de no multiplicar ambos términos de (8) por un término de la forma $\dfrac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^m} \dfrac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^n}$, porque entonces uno obtendría una expresión en donde *los índices mudos ocurren tres veces* (a & b en el lado izquierdo; m & n en el lado derecho). *Para evitar esta operación irregular, mejor se desarrolle la prueba como sigue, a partir de la misma ecuación (8).* Sustituimos los índices mudos p & q en el término al lado derecho por a & b respectivamente, para obtener:

(9) $g_{ab} dx^a dx^b = \bar{g}_{mn} \dfrac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^a} \dfrac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^b} dx^a dx^b \Rightarrow$

(10) $[g_{ab} - \bar{g}_{mn} \dfrac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^a} \dfrac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^b}] dx^a dx^b = 0$

Dado que $dx^a dx^b \neq 0$, se sigue que:

(11) $g_{ab} - \bar{g}_{mn} \dfrac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^a} \dfrac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^b} = 0 \Rightarrow g_{ab} = \bar{g}_{mn} \dfrac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^a} \dfrac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^b}$

En la ecuación (11) sustituimos x y g sin barra por $\bar{x}$ $\bar{g}$ con barra, y vice-versa, y sustituimos los índices a y b por p y q, y m y n por a y b, ara obtener ***el tensor métrico universal***:

$$(12)\quad \bar{g}_{mn} = g_{ab}\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^n} \quad \text{Q.E.D.}$$

A2. Símbolo de Christoffel, primera especie

El símbolo de Christoffel de primera especie se define como sigue:

$$(13)\quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right)$$

Nótese que los dos primeros índices libres en Γ son simétricos, es decir, $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha\gamma}$. Si uno hace la prueba y toma en cuenta que el tensor métrico es simétrico ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$), comprobará que ambos símbolos de Christoffel llevan a la misma definición (13). Definimos la siguiente ley de transformación:

$$(14)\quad \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{\beta\gamma}}{\partial \bar{x}^\alpha} + \frac{\partial \bar{g}_{\gamma\alpha}}{\partial \bar{x}^\beta} - \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\gamma}\right)$$

Recuerda:

$$(12)\quad \bar{g}_{mn} = g_{ab}\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^n} \quad \Rightarrow \quad \bar{g}_{\beta\gamma} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\gamma}$$

De (12) se obtiene:

$$(15)\quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha}\bar{g}_{\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha} g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\gamma}$$

De (14) y (15) se obtiene:

$$(16)\quad \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha}\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\gamma} g_{\mu\nu}\right] + \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\beta}\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\gamma}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\alpha} g_{\mu\nu}\right] - \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\gamma}\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} g_{\mu\nu}\right]\right)$$

Sacando las derivadas parciales de los tres términos, y tomando en cuenta que por la regla de la cadena, $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \bar{x}^\alpha} = \frac{\partial x^\eta}{\partial \bar{x}^\alpha}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\eta}$ obtenemos:

$$(17)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha}\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\gamma} g_{\mu\nu}\right]\right) = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\gamma} g_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\beta}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\gamma} g_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\beta}\frac{\partial x^\nu}{\delta \bar{x}^\gamma}\frac{\partial x^\eta}{\partial \bar{x}^\alpha}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\eta}$$

$$(18)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\beta}\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\gamma}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\alpha} g_{\mu\nu}\right]\right) = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \bar{x}^\beta \partial \bar{x}^\gamma}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\alpha} g_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\gamma}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta \partial \bar{x}^\alpha} g_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\gamma}\frac{\partial x^\nu}{\delta \bar{x}^\alpha}\frac{\partial x^\eta}{\partial \bar{x}^\beta}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\eta}$$

$$(19)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\left[\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\beta}}g_{\mu\nu}\right]\right)=\frac{\partial^{2}x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\gamma}\partial \bar{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\beta}}g_{\mu\nu}+\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}}\frac{\partial^{2}x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\gamma}\partial \bar{x}^{\beta}}g_{\mu\nu}+\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\delta \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\eta}}$$

Ahora bien, con una sustitución de índices mudos (μ & ν) en el segundo término del lado derecho de (17), éste y el primer término del lado derecho de (19) se anulan; y, con una sustitución semejante en el primer término del lado derecho de (18), éste y el segundo término del lado derecho de (19) también se anulan. Por lo tanto, si sustituimos (17), (18) y (19) en (16), obtenemos:

$$(20)\ \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^{2}x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}\partial \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}g_{\mu\nu}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial \bar{x}^{\alpha}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\eta}}+\frac{1}{2}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\frac{\partial x^{\nu}}{\delta \bar{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\eta}}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\delta \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\eta}}$$

Rotamos los índices mudos μ,ν,η en el segundo y tercer término del lado derecho, para obtener:

$$(21)\ \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial^{2}x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}\partial \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}g_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}}\frac{\partial g_{\nu\eta}}{\partial x^{\mu}}+\frac{1}{2}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\frac{\partial x^{\mu}}{\delta \bar{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial g_{\eta\mu}}{\partial x^{\nu}}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\delta \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\eta}}$$

Ahora definimos un nuevo símbolo de Christoffel, a saber:

$$(22)\ \Gamma_{\mu\nu\eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\eta}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\eta\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\eta}}\right)$$

Combinando (21) y (22), podemos definir $\bar{\Gamma}$ (con barra) en términos de Γ (sin barra):

$$(23)\ \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial^{2}x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}\partial \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}g_{\mu\nu}+\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}}\Gamma_{\mu\nu\eta}$$

Es conveniente comentar algunas características de este objeto.

a) $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}$ es un pseudo-tensor, porque si bien es cierto que al lado derecho de (23) aparece $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}}\Gamma_{\mu\nu\eta}$, como es propio de una ecuación tensorial, también aparece $\frac{\partial^{2}x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}\partial \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}g_{\mu\nu}$, lo que no es propio de una ecuación tensorial.

b) $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}$ es un pseudo-tensor *simétrico*, porque $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}=\bar{\Gamma}_{\beta\alpha\gamma}$, como se comprueba a continuación:

$$(14)\ \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{\beta\gamma}}{\partial \bar{x}^{\alpha}}+\frac{\partial \bar{g}_{\gamma\alpha}}{\partial \bar{x}^{\beta}}-\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\right)$$

Análogamente:

(14B) $\overline{\Gamma}_{\beta\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{g}_{\gamma\beta}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} + \frac{\partial \overline{g}_{\alpha\gamma}}{\partial \overline{x}^{\beta}} - \frac{\partial \overline{g}_{\beta\alpha}}{\partial \overline{x}^{\gamma}}\right)$

Ahora bien, dado que el tensor métrico es simétrico, como se comprobó arriba en la tercera observación ($\overline{g}_{\gamma\alpha} = \overline{g}_{\alpha\gamma}$, etcétera), consta que $\overline{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \overline{\Gamma}_{\beta\alpha\gamma}$.

c) $\overline{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}$ se puede representar por una matriz cúbica con 64 componentes, de los cuales, por ser un pseudo-tensor simétrico, 24 son independientes

A3. Símbolo de Christoffel, segunda especie, derivada de la primera especie

Recuerda:

(23) $\overline{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \overline{x}^{\alpha} \partial \overline{x}^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\gamma}} g_{\mu\nu} + \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\beta}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial \overline{x}^{\gamma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \Gamma_{\mu\nu\eta}$

y también:

(24) $\overline{g}^{\gamma\eta} = g^{\varepsilon\phi} \frac{\partial \overline{x}^{\gamma}}{\partial x^{\varepsilon}} \frac{\partial \overline{x}^{\eta}}{\partial x^{\phi}}$

El símbolo de Christoffel de segunda especie se define como sigue:

(25A) $\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} g^{\gamma\eta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\eta}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}\right)$

El símbolo de Christoffel de segunda especie, es simétrica, al igual que el de primera especie (véase arriba), es decir, $\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\eta}_{\beta\alpha}$. Análogamente, cambiando solamente los índices, obtenemos[1736] (25B)

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\nu} g^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}}\right) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu})$$

Este símbolo de Christoffel tiene la siguientes características: a) espacio-tiempo de cuatro dimensiones; b) tres índices, cada uno de los cuales corre de 1 a 4; c) los dos índices de abajo son simétricos; d) hay 64 componentes, que se pueden representar en una matriz cúbica, de los cuales 24 son independientes y 40 dependientes.

Dada la regla (g) arriba dada, podemos escribir la (25A) con barra:

(25C) $\overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} = \overline{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} \overline{g}^{\gamma\eta}$

y también:

(25D) $\overline{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} \overline{g}_{\gamma\eta}$

[1736] Hans Stephani, *General Relativity,* 2nd ed.(1990): 5, ecuación 1.16

Sustituyendo (23) & (24) en (25C), obtenemos:

$$(26)\quad \overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial\overline{x}^{\alpha}\partial\overline{x}^{\beta}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\overline{x}^{\gamma}} g_{\mu\nu}\, g^{\varepsilon\phi}\frac{\partial\overline{x}^{\gamma}}{\partial x^{\varepsilon}}\frac{\partial\overline{x}^{\eta}}{\partial x^{\phi}} + \frac{\partial x^{\nu}}{\partial\overline{x}^{\beta}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial\overline{x}^{\gamma}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\overline{x}^{\alpha}}\Gamma_{\mu\nu\eta}\, g^{\varepsilon\phi}\frac{\partial\overline{x}^{\gamma}}{\partial x^{\varepsilon}}\frac{\partial\overline{x}^{\eta}}{\partial x^{\phi}} \Rightarrow$$

$$(27)\quad \overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial\overline{x}^{\alpha}\partial\overline{x}^{\beta}}\delta^{\nu}_{\varepsilon} g_{\mu\nu}\, g^{\varepsilon\phi}\frac{\partial\overline{x}^{\eta}}{\partial x^{\phi}} + \frac{\partial x^{\nu}}{\partial\overline{x}^{\beta}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\overline{x}^{\alpha}}\Gamma_{\mu\nu\eta}\, g^{\varepsilon\phi}\delta^{\eta}_{\varepsilon}\frac{\partial\overline{x}^{\eta}}{\partial x^{\phi}} \Rightarrow$$

$$(28)\quad \overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial\overline{x}^{\alpha}\partial\overline{x}^{\beta}}\frac{\partial\overline{x}^{\eta}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial x^{\nu}}{\partial\overline{x}^{\beta}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\overline{x}^{\alpha}}\Gamma_{\mu\nu\eta}\, g^{\eta\phi}\frac{\partial\overline{x}^{\eta}}{\partial x^{\phi}}$$

En el primer término del lado derecho cambiamos μ por ϕ

$$(29)\quad \overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^{\phi}}{\partial\overline{x}^{\alpha}\partial\overline{x}^{\beta}}\frac{\partial\overline{x}^{\eta}}{\partial x^{\phi}} + \frac{\partial x^{\nu}}{\partial\overline{x}^{\beta}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\overline{x}^{\alpha}}\Gamma^{\phi}_{\mu\nu}\frac{\partial\overline{x}^{\eta}}{\partial x^{\phi}} \Rightarrow$$

$$(30)\quad \overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} = \frac{\partial\overline{x}^{\eta}}{\partial x^{\phi}}\left[\frac{\partial^2 x^{\phi}}{\partial\overline{x}^{\alpha}\partial\overline{x}^{\beta}} + \Gamma^{\phi}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\overline{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\overline{x}^{\beta}}\right] \text{ Q.E.D.}$$

A4. La 'derivada covariante'

A4.1. La derivada covariante de un tensor covariante:

(31) $\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\, g^{\gamma\eta}$ en donde α,β,η son libres y γ es mudo

Recuerda el objeto (13) y la ley de transformación (30):

$$(13)\quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}\right) \;\&$$

$$(30)\quad \overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} = \frac{\partial\overline{x}^{\eta}}{\partial x^{\phi}}\left[\frac{\partial^2 x^{\phi}}{\partial\overline{x}^{\alpha}\partial\overline{x}^{\beta}} + \Gamma^{\phi}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\overline{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\overline{x}^{\beta}}\right]$$

Se multiplican ambos lados de la ecuación (30) con $\dfrac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial\overline{x}^{\eta}} \Rightarrow$

$$(32)\quad \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial\overline{x}^{\eta}}\overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial\overline{x}^{\eta}}\frac{\partial\overline{x}^{\eta}}{\partial x^{\phi}}\left[\frac{\partial^2 x^{\phi}}{\partial\overline{x}^{\alpha}\partial\overline{x}^{\beta}} + \Gamma^{\phi}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\overline{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\overline{x}^{\beta}}\right] \Rightarrow$$

$$(33)\quad \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial\overline{x}^{\eta}}\overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} = \delta^{\varepsilon}_{\phi}\left[\frac{\partial^2 x^{\phi}}{\partial\overline{x}^{\alpha}\partial\overline{x}^{\beta}} + \Gamma^{\phi}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\overline{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\overline{x}^{\beta}}\right] \Rightarrow$$

$$(34)\quad \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial\overline{x}^{\eta}}\overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} = \left[\frac{\partial^2 x^{\varepsilon}}{\partial\overline{x}^{\alpha}\partial\overline{x}^{\beta}} + \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\overline{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\overline{x}^{\beta}}\right] \Rightarrow$$

$$(35)\quad \frac{\partial^2 x^{\varepsilon}}{\partial\overline{x}^{\alpha}\partial\overline{x}^{\beta}} = \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial\overline{x}^{\eta}}\overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\overline{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\overline{x}^{\beta}}$$

Recordar que un tensor covariante se define como sigue:

(36) $\overline{A}_{\alpha} = \dfrac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} A_{\varepsilon} \Rightarrow \dfrac{\partial \overline{A}_{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\beta}} = \dfrac{\partial}{\partial \overline{x}^{\beta}} \left(\dfrac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} A_{\varepsilon} \right) = A_{\varepsilon} \dfrac{\partial^2 x^{\varepsilon}}{\partial \overline{x}^{\beta} \partial \overline{x}^{\alpha}} + \dfrac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \dfrac{\partial A_{\varepsilon}}{\partial \overline{x}_{\beta}}$

De (35) y (36), obtenemos:

(37) $\dfrac{\partial \overline{A}_{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\beta}} = \dfrac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial \overline{x}^{\eta}} \overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} A_{\varepsilon} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu} \dfrac{\partial x^{\mu}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \dfrac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\beta}} A_{\varepsilon} + \dfrac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \dfrac{\partial A_{\varepsilon}}{\partial \overline{x}^{\beta}}$

Aplicamos en el último término la regla de la cadena y sustituimos en el último término ε (que es mudo) por μ y en el primer término del lado derecho sustituimos $\dfrac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial \overline{x}^{\eta}} A_{\varepsilon}$ por $\overline{A}_{\eta}$;

(38) $\dfrac{\partial \overline{A}_{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\beta}} = \overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} \overline{A}_{\eta} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu} \dfrac{\partial x^{\mu}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \dfrac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\beta}} A_{\varepsilon} + \dfrac{\partial x^{\mu}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \dfrac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\beta}} \dfrac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \Rightarrow$

(39) $\dfrac{\partial \overline{A}_{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\beta}} - \overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} \overline{A}_{\eta} = \dfrac{\partial x^{\mu}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \dfrac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\beta}} \left(\dfrac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu} A_{\varepsilon} \right)$

En el lado izquierdo de esta ecuación tenemos términos con barra y en el lado derecho términos sin barra. Por el factor $\dfrac{\partial x^{\mu}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \dfrac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\beta}}$ en el lado derecho vemos que se trata de un tensor. Los términos con Γ en ambos lados son *los factores de corrección* que toman en cuenta la curvatura del espacio. Si estos factores fueran cero, como en el caso del espacio plano, la ecuación sería la siguiente:

(40) $\dfrac{\partial \overline{A}_{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\beta}} = \dfrac{\partial x^{\mu}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \dfrac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\beta}} \left(\dfrac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right)$

La ecuación (39) se escribe también de la siguiente manera:

(41) $\overline{A}_{\alpha,\beta} - \overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} \overline{A}_{\eta} = \dfrac{\partial x^{\mu}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \dfrac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\beta}} \left(A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu} A_{\varepsilon} \right)$

Ahora bien, por definición:

(42A) $A_{\alpha;\beta} \equiv A_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} A_{\eta}$ (con o sin barra)

Combinando (41) y (42A) obtenemos:

(42B) $\overline{A}_{\alpha;\beta} = \dfrac{\partial x^{\mu}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \dfrac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\beta}} A_{\mu;\nu}$

Estas son convenciones que a veces, al principiante, confunden más de lo que le ayudan, pero hemos de reconocer estos términos cuando los encontramos, aunque podemos abstenernos de usarlos.

A4.2. La derivada covariante de un tensor contravariante:

Recordar que un tensor contravariante se define como sigue:

(43) $$\overline{A}^{\alpha} = \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\varepsilon}} A^{\varepsilon} \Rightarrow \frac{\partial \overline{A}^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\beta}} = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^{\beta}}\left(\frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\varepsilon}} A^{\varepsilon}\right) = A^{\varepsilon} \frac{\partial^2 \overline{x}^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\beta} \partial x^{\varepsilon}} + \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\varepsilon}} \frac{\partial A^{\varepsilon}}{\partial \overline{x}_{\beta}}$$

Aplicamos la regla de la cadena a los dos últimos términos de la ecuación (43):

(44) $$\frac{\partial \overline{A}^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\beta}} = A^{\varepsilon} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \overline{x}^{\beta}} \frac{\partial^2 \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varepsilon}} + \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\varepsilon}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \overline{x}^{\beta}} \frac{\partial A^{\varepsilon}}{\partial x^{\gamma}} \Rightarrow$$

Recordemos:

(35) $$\frac{\partial^2 x^{\varepsilon}}{\partial \overline{x}^{\alpha} \partial \overline{x}^{\beta}} = \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial \overline{x}^{\eta}} \overline{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \overline{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\beta}}$$

Análogamente (como en espejo):

(45) $$\frac{\partial^2 \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varepsilon}} = \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\eta}} \Gamma^{\eta}_{\gamma\varepsilon} - \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\varepsilon}}$$

(46) $$\frac{\partial \overline{A}^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\beta}} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \overline{x}^{\beta}} \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\eta}} \Gamma^{\eta}_{\gamma\varepsilon} A^{\varepsilon} - \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\varepsilon}} A^{\varepsilon} + \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\varepsilon}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \overline{x}^{\beta}} \frac{\partial A^{\varepsilon}}{\partial x^{\gamma}}$$

En el tercer término observamos que $\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \overline{x}^{\beta}} \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} = \delta^{\mu}_{\beta}$ y luego sustituimos μ por β y recordamos, además, $\frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\varepsilon}} A^{\varepsilon} \equiv \overline{A}^{\nu}$ y en el cuarto término sustituimos ε por η:

(47) $$\frac{\partial \overline{A}^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\beta}} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \overline{x}^{\beta}} \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\eta}} \Gamma^{\eta}_{\gamma\varepsilon} A^{\varepsilon} - \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\nu} \overline{A}^{\nu} + \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\eta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \overline{x}^{\beta}} \frac{\partial A^{\eta}}{\partial x^{\gamma}} \Rightarrow$$

(48) $$\frac{\partial \overline{A}^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\beta}} + \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\nu} \overline{A}^{\nu} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \overline{x}^{\beta}} \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\eta}} \left(\frac{\partial A^{\eta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\eta}_{\gamma\varepsilon} A^{\varepsilon}\right) \Rightarrow$$

(49) $$\overline{A}^{\alpha}_{,\beta} + \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\nu} \overline{A}^{\nu} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \overline{x}^{\beta}} \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\eta}} \left(A^{\eta}_{,\gamma} + \Gamma^{\eta}_{\gamma\varepsilon} A^{\varepsilon}\right)$$

Definimos la derivada covariante de un tensor contravariante como sigue:

(50A) $A^{\alpha}_{;\beta} \equiv A^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\eta} A^{\eta}$ (con o sin barra)

Combinando (49) y (50A) obtenemos la ley de transformación de la derivada covariante de un tensor contravariante :

(50B) $$\overline{A}^{\alpha}_{;\beta} = \frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\eta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \overline{x}^{\beta}} A^{\eta}_{;\gamma}$$

A 5. Símbolos de Christoffel en ecuaciones con tensores de rango superior

Para deducir las ecuaciones de la relatividad general, se requieren tensores de rango superior, razón por la cual a continuación analizaremos estos objetos. Independientemente del número de índices (el rango) del tensor, el símbolo de Christoffel siempre tiene tres índices, de los cuales los primeros dos son simétricos.

Recordemos:

(42A) $A_{\alpha;\beta} \equiv A_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} A_{\eta}$ (con o sin barra)

(50A) $A^{\alpha}_{;\beta} \equiv A^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\eta} A^{\eta}$ (con o sin barra)

Comentemos estas dos definiciones:

a) Los índices libres α y β siguen en el mismo lugar.
b) A^{α} y A_{α} son cuadrivectores, pero estos cuadrivectores en el factor de corrección cambian su índice libre por un índice mudo (A^{η} y A_{η}).
c) La posición del índice mudo es la misma que del índice libre ($A^{\alpha} \Rightarrow A^{\eta}$ y $A_{\alpha} \Rightarrow A_{\eta}$.
d) Por *cada* índice libre de un tensor existe un factor de corrección (con Γ)

Veamos algunos ejemplos:

(51) covariante segundo orden: $A_{\alpha\beta;\gamma} = A_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma} A_{\eta\beta} - \Gamma^{\eta}_{\beta\gamma} A_{\alpha\eta}$

(52) contravariante segundo orden: $A^{\alpha\beta}_{;\gamma} = A^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\eta\gamma} A^{\eta\beta} + \Gamma^{\beta}_{\eta\gamma} A^{\alpha\eta}$

(53) mixto segundo orden: $A^{\alpha}_{\beta;\gamma} = A^{\alpha}_{\beta,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu} A^{\nu}_{\beta} - \Gamma^{\nu}_{\beta\gamma} A^{\alpha}_{\nu}$

(54) mixto tercer orden: $A^{\alpha\beta}_{\gamma;\eta} = A^{\alpha\beta}_{\gamma,\eta} + \Gamma^{\alpha}_{\eta\nu} A^{\nu\beta}_{\gamma} + \Gamma^{\beta}_{\eta\gamma} A^{\alpha\nu}_{\gamma} - \Gamma^{\nu}_{\gamma\eta} A^{\alpha\beta}_{\nu}$

La derivada parcial de un símbolo de Christoffel, con base en (25) es la (55):

(25) $\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} g^{\gamma\eta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\eta} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} \right) \Rightarrow$

(55) $\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta,s} = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\gamma\eta}}{\partial x^{s}} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} \right) + \frac{1}{2} g^{\gamma\eta} \left(\frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{s}} + \frac{\partial^2 g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta} \partial x^{s}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{s}} \right)$

Este objeto (55) se usa en el tensor de Riemann-Christoffel, en las ecuaciones de la relatividad general.

En materia de tensores de rango superior son importantes dos teoremas:

I.- El teorema del cociente. Si se multiplica un objeto desconocido por un tensor *arbitrario* T (de cualquier rango) y el resultado es otro tensor T, entonces se sigue que también el objeto es un tensor. Ejemplos: T^{α}_{β} y $T^{\alpha\beta}$ son tensores arbitrarios.

(56) $T^{\alpha}_{\beta} * objeto = T^{\alpha}_{\beta\gamma} \Rightarrow objeto \equiv T_{\gamma}$

(57) $T^{\alpha\beta} * objeto = T^{\gamma} \Rightarrow objeto \equiv g^{\gamma}_{\alpha\beta}$

II.- La derivada covariante de cualquier tensor métrico g (que, por definición es del rango dos), se comporta como la derivada de una constante y, por lo tanto, es cero. Ejemplo:
(58) $g^{\alpha\sigma}_{;\gamma} = 0$

Prueba:
(59) $g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma} g_{\eta\beta} - \Gamma^{\eta}_{\beta\gamma} g_{\alpha\eta} = g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma\beta} - \Gamma_{\beta\gamma\alpha}$

Recordemos:
(22) $\Gamma_{\mu\nu\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\eta}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\eta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\eta}} \right)$

Ahora bien, con base en (22) obtenemos:
(60) $-\Gamma_{\alpha\gamma\beta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} \right)$
(61) $-\Gamma_{\beta\gamma\alpha} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \right)$

De (60) y (61) obtenemos:
(62) $-\Gamma_{\alpha\gamma\beta} - \Gamma_{\beta\gamma\alpha} = = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} \right) = -\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} = -g_{\alpha\beta,\gamma} \Rightarrow \Gamma_{\alpha\gamma\beta} + \Gamma_{\beta\gamma\alpha} = g_{\alpha\beta,\gamma}$

De (59) y (62) obtenemos:
(63) $g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\alpha\beta,\gamma} = 0$ Q.E.D.

De esta verdad ($g^{\alpha\sigma}_{;\gamma} = 0$) se deduce una conclusión importante, necesaria para las ecuaciones de la relatividad general, a saber, que se pueden bajar y subir índices por medio del tensor métrico, por ejemplo:

(64) $T^{\alpha}_{\beta;\gamma} = (g^{\alpha\sigma} T_{\sigma\beta})_{;\gamma} = g^{\alpha\sigma}_{;\gamma} T_{\sigma\beta} + g^{\alpha\sigma} T_{\sigma\beta;\gamma} = 0 + g^{\alpha\sigma} T_{\sigma\beta;\gamma} = g^{\alpha\sigma} T_{\alpha\beta;\gamma}$

B. LOS TENSORES DE RIEMANN Y DE RICCI

B 1. Derivación del tensor de Riemann

Al considerarse las segundas derivadas covariantes cruzadas de un tensor, se obtiene la expresión[1737] en donde R^{r}_{msq} se llama **el tensor de Riemann**. A continuación se construye

[1737] Hans Stephani, *General Relativity,* 2nd ed.(1990): 54, ecuación 6.4

explícitamente este objeto y se explican algunas de sus propiedades fundamentales. Este tensor es de suma importancia en la teoría de la relatividad general.

Recordemos:

$$(35)\quad \frac{\partial^2 x^\varepsilon}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} = \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \bar{x}^\eta} \bar{\Gamma}^\eta_{\alpha\beta} - \Gamma^\varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \Rightarrow \text{(cambiando barra y no-barra)}$$

$$(65)\quad \frac{\partial^2 \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\eta} \Gamma^\eta_{\alpha\beta} - \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta}$$

Ahora subimos la ecuación a un orden superior:

$$(66)\quad \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \frac{\partial^2 \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \{ \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\eta} \Gamma^\eta_{\alpha\beta} \} - \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \{ \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} \} \Rightarrow$$

$$(67)\quad \frac{\partial^3 \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\kappa \partial x^\alpha \partial x^\beta} =$$

$$= \Gamma^\eta_{\alpha\beta,\kappa} \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\eta} + \Gamma^\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\kappa \partial x^\eta} - \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\mu\nu,\bar{\lambda}} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} - \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \bar{x}^\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} - \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \bar{x}^\nu}{\partial x^\kappa \partial x^\beta}$$

Aplicando (65) en el segundo, cuarto y quinto término de (67), obtenemos (recordemos que $\varepsilon, \kappa, \alpha, \beta$ son índices libres y η, λ, μ, ν son índices mudos):

$$(68)\quad \frac{\partial^3 \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\kappa \partial x^\alpha \partial x^\beta} = \Gamma^\eta_{\alpha\beta,\kappa} \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\eta} + \Gamma^\eta_{\alpha\beta} \{ \Gamma^\lambda_{\kappa\eta} \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\lambda} - \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\eta} \}$$

$$- \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\mu\nu,\bar{\lambda}} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} - \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} \{ \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda_{\kappa\alpha} - \bar{\Gamma}^\mu_{\eta\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\eta}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^\alpha} \}$$

$$- \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \{ \Gamma^\lambda_{\kappa\beta} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\lambda} - \bar{\Gamma}^\nu_{\eta\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\eta}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^\beta} \} =$$

Agrupamos los términos y sustituimos índices mudos por otros. En el primer término del primer grupo se sustituye η por λ:

$$(69)\quad \Gamma^\eta_{\alpha\beta,\kappa} \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\eta} + \Gamma^\eta_{\alpha\beta} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta} \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\lambda_{\alpha\beta,\kappa} \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\eta_{\alpha\beta} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta} \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\lambda} \{ \Gamma^\lambda_{\alpha\beta,\kappa} + \Gamma^\eta_{\alpha\beta} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta} \}$$

En el segundo término del segundo grupo se sustituyen η por λ, γ por μ y μ por γ, y en el tercer término se sustituyen γ por ν, η por λ y ν por γ:

$$(70)\quad - \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\mu\nu,\bar{\lambda}} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} + \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\mu\nu} \bar{\Gamma}^\mu_{\eta\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\eta}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^\alpha} + \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\mu\nu} \bar{\Gamma}^\nu_{\eta\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\eta}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^\beta} =$$

$$- \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\mu\nu,\bar{\lambda}} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} + \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\gamma\nu} \bar{\Gamma}^\gamma_{\lambda\mu} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} + \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\mu\gamma} \bar{\Gamma}^\gamma_{\lambda\nu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} =$$

$$- \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} \{ \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\mu\nu,\bar{\lambda}} + \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\gamma\nu} \bar{\Gamma}^\gamma_{\lambda\mu} + \bar{\Gamma}^\varepsilon_{\mu\gamma} \bar{\Gamma}^\gamma_{\lambda\nu} \}$$

En el tercer grupo sustituimos en el segundo término λ por η, μ por ν, y ν por μ y en el tercer término λ por η:

$$(71) - \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\ \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\mu\nu}\ \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\kappa}}\ \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\eta}} - \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\mu\nu}\ \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\ \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\ \Gamma^{\lambda}_{\kappa\alpha} - \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\mu\nu}\ \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\ \Gamma^{\lambda}_{\kappa\beta}\ \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} =$$

$$- \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\ \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\mu\nu}\ \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\kappa}}\ \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\eta}} - \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\nu\mu}\ \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}}\ \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\eta}}\ \Gamma^{\eta}_{\kappa\alpha} - \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\mu\nu}\ \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\ \Gamma^{\eta}_{\kappa\beta}\ \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\eta}} =$$

$$- \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\mu\nu}\ \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\eta}}\ \{ \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}}\ \Gamma^{\eta}_{\kappa\alpha} + \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\ \Gamma^{\eta}_{\kappa\beta} \}$$

Sumando (69), (70), (71), obtenemos:

$$(72) \frac{\partial^3 \overline{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} =$$

$$= \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x^{\lambda}} \{\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta,\kappa} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\ \Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta}\} - \frac{\partial \overline{x}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}}\ \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\ \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \{\overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\mu\nu,\lambda} - \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\nu}\ \overline{\Gamma}^{\gamma}_{\lambda\mu} - \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\mu\gamma} \overline{\Gamma}^{\gamma}_{\lambda\nu}\}$$

$$- \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\mu\nu}\ \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\eta}}\ \{\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\ \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma^{\eta}_{\kappa\alpha}\ \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\eta}_{\kappa\beta}\ \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\}$$

Análogamente se deduce que:

$$(73) \frac{\partial^3 \overline{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha} \partial x^{\kappa}} =$$

$$= \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x^{\lambda}} \{\Gamma^{\lambda}_{\alpha\kappa,\beta} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\kappa}\ \Gamma^{\lambda}_{\beta\eta}\} - \frac{\partial \overline{x}^{\lambda}}{\partial x^{\beta}}\ \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\ \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\kappa}} \{\overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\mu\nu,\lambda} - \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\nu}\ \overline{\Gamma}^{\gamma}_{\lambda\mu} - \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\mu\gamma} \overline{\Gamma}^{\gamma}_{\lambda\nu}\}$$

$$- \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\mu\nu}\ \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\eta}}\ \{\Gamma^{\eta}_{\alpha\kappa}\ \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\eta}_{\beta\alpha}\ \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma^{\eta}_{\beta\kappa}\ \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\}$$

Dado que (72) y (73) son derivadas ordinarias cruzadas, y dado que derivadas funciones cruzadas continuas son iguales, se sigue que (72) menos (73) equivale cero. Dado que los términos entre paréntesis del último término de (72) equivalen a los términos entre paréntesis del último término de (73), e intercambiando los índices mudos λ y ν en el segundo término del lado derecho de (73) el resultado de esta resta es el siguiente:

$$(74)= [(72)\text{-}(73)]= \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x^{\lambda}} \{\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\kappa,\beta} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\ \Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\kappa} \Gamma^{\lambda}_{\beta\eta}\}$$

$$- \frac{\partial \overline{x}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}}\ \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\ \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \{\overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\mu\nu,\lambda} - \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\mu\lambda,\overline{\nu}} - \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\nu}\ \overline{\Gamma}^{\gamma}_{\lambda\mu} + \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\lambda} \overline{\Gamma}^{\gamma}_{\nu\mu}\}$$

Ahora bien, definamos dos ***tensores de Riemann***, "para no escribir tanto"[1738]:

$$(75)\ R^{\lambda}_{\alpha\beta\kappa} = \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\kappa,\beta} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\ \Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\kappa} \Gamma^{\lambda}_{\beta\eta}$$

$$(76)\ R^{\varepsilon}_{\mu\nu\lambda} = \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\mu\nu,\lambda} - \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\mu\lambda,\overline{\nu}} - \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\eta\nu}\ \overline{\Gamma}^{\eta}_{\lambda\mu} + \overline{\Gamma}^{\varepsilon}_{\eta\lambda} \overline{\Gamma}^{\eta}_{\nu\mu}$$

[1738] Hans Stephani, *General Relativity,* 2nd ed.(1990): XIV y 53, ecuación 6.3 (sustituyendo en (73) el índice mudo γ por η)

Por lo tanto, sustituyendo (75) y (76) en (74), obtenemos:

(77) $\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x^{\lambda}} R^{\lambda}_{\alpha\beta\kappa} - \frac{\partial \overline{x}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\beta}} R^{\varepsilon}_{\mu\nu\lambda} = 0$

Multiplicamos ambos términos con $\frac{\partial x^{\eta}}{\partial \overline{x}^{\varepsilon}}$:

(78) $\frac{\partial x^{\eta}}{\partial \overline{x}^{\varepsilon}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x^{\lambda}} R^{\lambda}_{\alpha\beta\kappa} = \frac{\partial x^{\eta}}{\partial \overline{x}^{\varepsilon}} \frac{\partial \overline{x}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\beta}} R^{\varepsilon}_{\mu\nu\lambda}$

Dado que:

(79) $\frac{\partial x^{\eta}}{\partial \overline{x}^{\varepsilon}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x^{\lambda}} = \delta^{\eta}_{\lambda}$

De (78) y (79) se obtiene:

(80) $\overline{R}^{\eta}_{\alpha\beta\kappa} = \frac{\partial x^{\eta}}{\partial \overline{x}^{\varepsilon}} \frac{\partial \overline{x}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \overline{x}^{\nu}}{\partial x^{\beta}} R^{\varepsilon}_{\mu\nu\lambda}$

Ahora bien, si comparamos (75) y (80) (sustituyendo en (75) λ por η), observamos que ambas ecuaciones definen $\overline{R}^{\eta}_{\alpha\beta\kappa}$, ***se concluye que (75) es un tensor de rango cuatro y tiene 256 componentes. Se puede dar en forma mixta o en forma covariante:***

(81) $R^{\eta}_{\alpha\beta\kappa} = g^{\eta\sigma} R_{\sigma\alpha\beta\kappa}$

En tensor de Riemann tiene algunas propiedades:

(82) conmutación simétrica: $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$ (36 componentes independientes)

(83) conmutación anti-simétrica: $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\beta\alpha\nu\mu}$ (20 comp. indep.)

(84) conmutación cíclica: $R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$

B 2. El tensor de Ricci

Es posible establecer identidades para la métrica $g_{\mu\nu}$ con base en las propiedades del tensor de Riemann y más simplemente, con ***el tensor derivado de la contracción del tensor de Riemann que se llama tensor de Ricci***. Por lo tanto, el ***tensor de Ricci*** se deriva del tensor de Riemann, contrayendo índices.[1739] Solamente existe una contracción independiente, que tiene un valor no cero, que llamamos el tensor de Ricci:

(75) $R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} = -\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma,\beta} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\lambda}_{\gamma\eta} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\beta\eta}$

(85 A) $\underset{contraer-índices}{\lambda \to \beta} \Rightarrow R^{\beta}_{\alpha\beta\gamma} = -\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma,\beta} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{\gamma\eta} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\beta}_{\beta\eta}$

De (85 A) obtenemos ***el tensor de Ricci*** (la 87)

[1739] Hans Stephani, *General Relativity,* 2nd ed.(1990): XIV y 57, ecuación 6.21

(85B) $R_{\alpha\gamma} = R^{\beta}_{\alpha\beta\gamma}$

(86) $g^{\mu\alpha} R_{\mu\alpha\beta\gamma} = g^{\alpha\mu} R_{\alpha\mu\beta\gamma} = -g^{\alpha\mu} R_{\mu\alpha\beta\gamma}$

(87) si es cierto que $[g^{\mu\alpha} R_{\mu\alpha\beta\gamma} = -g^{\mu\alpha} R_{\mu\alpha\beta\gamma}] \Rightarrow g^{\mu\alpha} R_{\mu\alpha\beta\gamma} = 0$

B 3. El escalar de curvatura

Para el establecimiento de las ecuaciones de Einstein, se utiliza ***la contracción del tensor mixto de Ricci***, R[1740]. El ***escalar de curvatura de Ricci*** se define como en (88) y tiene algunas propiedades que encontramos en la ecuación (89):

(88) $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$

(89) $R = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\eta} R_{\alpha\beta\gamma\eta} = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\eta} R_{\beta\alpha\eta\gamma} = -g^{\alpha\gamma} g^{\beta\eta} R_{\beta\alpha\gamma\eta} = -g^{\alpha\gamma} g^{\beta\eta} R_{\alpha\beta\gamma\eta}$

En la (90) el primer y tercer factor son iguales, de modo que por (87) se sigue que:

(90) $g^{\alpha\beta} g^{\gamma\eta} R_{\alpha\beta\gamma\eta} = g^{\beta\alpha} g^{\eta\gamma} R_{\beta\alpha\gamma\eta} = -g^{\beta\alpha} g^{\eta\gamma} R_{\alpha\beta\gamma\eta} = 0$

B 4. El tensor de Riemann y la curvatura del espacio

Definimos la derivada segunda contravariante del tensor A_μ como $A_{\mu;\nu;\kappa}$:

(91) $A_{\mu;\nu;\kappa} = \dfrac{\partial}{\partial x^\kappa} A_{\mu;\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa} A_{\lambda;\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu} A_{\lambda;\mu}$

Recordemos:

(92) $A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} A_\eta$

(93) $A_{\lambda;\nu} = A_{\lambda,\nu} - \Gamma^{\eta}_{\lambda\nu} A_\eta$

(94) $A_{\lambda;\mu} = A_{\lambda,\mu} - \Gamma^{\eta}_{\lambda\mu} A_\eta$

Sustituimos (92), (93) y (94) en (91), para obtener (95) y análogamente, (96):

(95) $A_{\mu;\nu;\kappa} = \dfrac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\nu} - \Gamma^{\eta}_{\mu\nu,\kappa} A_\eta - \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} A_{\eta,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa} A_{\lambda;\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa} \Gamma^{\eta}_{\lambda\nu} A_\eta - \Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu} A_{\lambda,\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu} \Gamma^{\eta}_{\lambda\mu} A_\eta$

(96) $A_{\mu;\kappa;\nu} = \dfrac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa,\nu} A_\eta - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa} A_{\eta,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A_{\lambda;\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \Gamma^{\eta}_{\lambda\kappa} A_\eta - \Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} A_{\lambda,\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} \Gamma^{\eta}_{\lambda\mu} A_\eta$

El primer término del lado derecho de (95) es igual al primer término del lado derecho de (96); también el tercer término del lado derecho de (95) es igual al cuarto término del lado derecho de (96), y así sucesivamente el cuarto término (95) y el tercero (96), el sexto (95) y el sexto (96), y el séptimo (95) y el séptimo (96). Por lo tanto (95) menos (96) nos da:

(97) $A_{\mu;\nu;\kappa} - A_{\mu;\kappa;\nu} = -A_\eta [\Gamma^{\eta}_{\mu\nu,\kappa} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa} \Gamma^{\eta}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \Gamma^{\eta}_{\lambda\kappa}]$

Ahora bien, recordemos[1741]:

[1740] Hans Stephani, *General Relativity,* 2nd ed.(1990): 57, ecuación 6.22

[1741] Hans Stephani, *General Relativity,* 2nd ed.(1990): XIV

(98) $R^{\lambda}_{\alpha\beta\kappa} = \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\kappa,\beta} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\,\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\beta\eta}$

$\Rightarrow\; R^{\eta}_{\mu\nu\kappa} = \Gamma^{\eta}_{\mu\nu,\kappa} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\,\Gamma^{\eta}_{\kappa\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}\Gamma^{\eta}_{\nu\lambda}$

Sustituimos (98) en (97), para obtener:
(99) $A_{\mu;\nu;\kappa} - A_{\mu;\kappa;\nu} = -A_{\eta}R^{\eta}_{\mu\nu\kappa}$

Si $A_{\mu;\nu;\kappa} - A_{\mu;\kappa;\nu} = 0$, estamos en el espacio de Minkowski (sin campo gravitacional), con el símbolo de Christoffel igual a cero (coordenadas cartesianas) ó diferente de cero (coordenadas esféricas o cilíndricas). Si $A_{\mu;\nu;\kappa} - A_{\mu;\kappa;\nu} \neq 0$, estamos en un espacio curvado gravitacionalmente, con el símbolo de Christoffel diferente de cero.

B5. Identidades de Bianchi

Partimos de la siguiente identidad:
(100) $R_{\alpha\beta\mu\nu;\eta} + R_{\alpha\beta\eta\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\eta;\mu} = 0$

Multiplicamos los términos con $g^{\alpha\mu}$:
(101) $g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu;\eta} + g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\eta\mu;\nu} + g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\nu\eta;\mu}$

Hacemos un interludio para comprobar que $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$:
(102) $g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}g_{\eta\beta} - \Gamma^{\eta}_{\beta\gamma}g_{\alpha\eta} \Rightarrow$

(103) $$g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - \frac{1}{2}g_{\eta\beta}g^{\eta\mu}(g_{\alpha\mu,\gamma} + g_{\mu\gamma,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\mu}) - \frac{1}{2}g_{\alpha\eta}g^{\eta\mu}(g_{\beta\mu,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}) =$$
$$= g_{\alpha\beta,\gamma} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\beta}(g_{\alpha\mu,\gamma} + g_{\mu\gamma,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\mu}) - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\alpha}(g_{\beta\mu,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu})$$
$$= g_{\alpha\beta,\gamma} - \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\beta}) - \frac{1}{2}(g_{\beta\alpha,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha})$$

De los siete términos del lado derecho, el primero anula la suma del segundo y quinto; el tercero anula el séptimo; y el cuarto, el sexto. Por lo tanto:
(104) $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$;

Análogamente se puede demostrar que:
(105) $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$

Ahora bien:
(106) $(g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu})_{;\eta} = g^{\alpha\mu}{}_{;\eta}R_{\alpha\beta\mu\nu} + g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu;\eta} = g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu;\eta} = R_{\beta\nu;\eta}$

(107) $(g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\eta\mu})_{;\nu} = g^{\alpha\mu}{}_{;\nu}R_{\alpha\beta\eta\mu} + g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\eta\mu;\nu} = g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\eta\mu;\nu} = (-g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\eta})_{;\nu} = -R_{\beta\eta;\nu}$

(108) $(g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\nu\eta})_{;\mu} = g^{\alpha\mu}{}_{;\mu}R_{\alpha\beta\nu\eta} + g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\nu\eta;\mu} = g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\nu\eta;\mu} = R^{\mu}_{\beta\nu\eta;\mu}$

Los términos (106), (107) y (108) son los de la ecuación (101) y, por lo tanto:

(109) $R_{\beta\nu;\eta} - R_{\beta\eta;\nu} + R^{\mu}_{\beta\nu\eta;\mu} = 0$

Multiplicamos todos los términos con $g^{\beta\nu}$:

(110) $g^{\beta\nu} R_{\beta\nu;\eta} - g^{\beta\nu} R_{\beta\eta;\nu} + g^{\beta\nu} R^{\mu}_{\beta\nu\eta;\mu} = 0 \Rightarrow$

(111) $R_{;\eta} - (g^{\beta\nu} R_{\beta\eta})_{;\nu} - (g^{\beta\nu} g^{\mu\alpha} R_{\beta\alpha\nu\eta})_{;\mu} = 0 \Rightarrow$

(112) $R_{,\eta} - R^{\nu}_{\eta\,;\nu} - R^{\mu}_{\eta\,;\mu} = 0 \quad \Rightarrow$

(113) $R_{,\eta} - 2R^{\nu}_{\eta\,;\nu} = 0 \Rightarrow$

(114) $(\frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\eta} R - R^{\nu}_{\eta})_{;\nu} = 0 \Rightarrow$

(115) $(\frac{1}{2} g^{\mu\eta}\delta^{\nu}_{\eta} R - g^{\mu\eta} R^{\nu}_{\eta})_{;\nu} = 0 \Rightarrow$

(116) $(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R)_{;\nu} = 0$

Hasta este momento del razonamiento matemático, el objeto entre paréntesis en la ecuación 116, a saber, $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$***, representa la geometría curva, al igual que los tensores de Rieman (75 y 76) el tensor de Ricci (87) y el escalar de curvatura de Ricci (88), que nos llevaron a la (116). Llamemos, por ahora, al tensor de Einstein*** $G^{\mu\nu}$***, aclarando que este objeto todavía no tiene ningún significado físico.***

C. EL LÍMITE NEWTONIANO DE LA ECUACIÓN DE LAS GEODESICAS

C1. La geodésica del espacio curvo

1. La ecuación de Euler-Lagrange

El dominio de la funcional $F(y(x))$ es el conjunto de funciones $y(x)$. Un ejemplo: $F(y(x)) = \int_0^2 [y(x)]^2 dx$. En el caso particular de $y = x$, se sigue que

$$F(y(x)) = \int_0^2 [y(x)]^2\, dx = \int_0^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = 2\,{}^2\!/_3 .$$

La "funcional" se llama "acción" cuando entra el factor tiempo.

(117) $J[y(t)] = \int_{t_1}^{t_2} F(y, \dot{y})dt$,

en donde

(118) $y = y(t)$ &

(119) $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$

Dado que y es una función de t, se sigue que en cualquier punto del tiempo t_n, la función tiene un valor y_n determinado por t_n

(120) $t_n \Rightarrow y_n$

Ahora bien, buscamos una $y(t)$ tal que $J[y(t)]$ sea un extremo, máximo o mínimo:

(121) $J[y(t)] = \int_{t_1}^{t_2} F(y,\dot{y})dt$,

y otra función, cercana a la mínima, como:

(122) $J[y(t),\alpha] = \int_{t}^{t_2} F(Y,\dot{Y})dt$

en donde:

(123) $\eta(t)$ define la desviación de la ruta mínima

(124) α es el factor escalar que define la magnitud de la desviación

(125) $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$

(126) $Y = y + \alpha\eta(t)$

(127) $\dot{Y} = \dot{y} + \alpha\dot{\eta}(t)$

En *los extremos* t_1 y t_2 de las dos curvas, éstas comparten el mismo valor, de modo que allí:

(128) $Y(t_1) = y(t_1)$

(129) $\dot{Y}(t_2) = y(t_2)$

La acción J tiene *un extremo* en Y si

(130) $\left.\dfrac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$

De (121) y (129), obtenemos:

(131) $\left.\dfrac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \dfrac{\partial}{\partial \alpha} F(Y,\dot{Y})dt = 0$

Por la regla de la cadena de una función que depende de dos variables:

(132) $\dfrac{\partial}{\partial \alpha} F(Y,\dot{Y}) = \dfrac{\partial F}{\partial Y}\dfrac{\partial Y}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial F}{\partial \dot{Y}}\dfrac{\partial \dot{Y}}{\partial \alpha}$

De (125), (126) y (131), obtenemos:

(133) $\dfrac{\partial F(Y,\dot{Y})}{\partial \alpha} = \eta(t)\dfrac{\partial F}{\partial Y} + \dot{\eta}(t)\dfrac{\partial F}{\partial \dot{Y}}$

De (130) y (132), obtenemos:

(134) $\left.\dfrac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \eta(t)\dfrac{\partial F}{\partial Y}dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{\eta}(t)\dfrac{\partial F}{\partial \dot{Y}}dt = 0$

Independientemente de lo anterior, por definición:

(135) $\frac{d}{dt}\left(\eta \frac{\partial F}{\partial \dot{Y}}\right) = \dot{\eta}\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} + \eta \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}}\right) \Rightarrow \dot{\eta}\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} = \frac{d}{dt}\left(\eta \frac{\partial F}{\partial \dot{Y}}\right) - \eta \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}}\right)$

Sustituimos (135) en (134):

(136) $\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \eta(t)\frac{\partial F}{\partial Y}dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\eta \frac{\partial F}{\partial \dot{Y}}\right)dt - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}}\right)dt = 0$

Ahora bien,

(137) $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0 \Rightarrow$

(138) $\left.\eta \frac{\partial F}{\partial \dot{Y}}\right|_{t}^{t_2} = 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t} d\left(\eta \frac{\partial F}{\partial \dot{Y}}\right) = 0$

Sustituimos (138) en (136) para obtener.

(139) $\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \eta(t)[\frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}}\right)]dt = 0$

Ahora bien, es importante observar que en general:

(140) $\eta(t) \neq 0$

De (139) y (140), obtenemos:

(141) $\frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}}\right) = 0$

Recordemos con base en (125) y (126) que, si $\alpha = 0$

(142) $Y = y$ &

(143) $\dot{Y} = \dot{y}$

Combinando (141), (142) & (143), obtenemos:

(144) $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = 0$

La (144) es la ecuación de Euler-Lagrange, que nos da las condiciones necesarias y suficientes, para la validez de $\left.\frac{\partial F}{\nabla \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$. El segundo término de (144) es la Lagrangiana.

2. La distancia más corta entre dos puntos en un plano

Recordemos:

(145) $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow F = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}(dx)^2} \Rightarrow$

(146) $F = ds = \sqrt{(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1+\dot{y}^2}dx$

En este caso (146), F es solamente una función de $\dot{y}(x)$, de modo que:

(147) $J[y(x)] = \int_{x_{11}}^{x_2} F(y,\dot{y})dx = \int_{x_1}^{x} F(\dot{y})dx \Rightarrow$

(148) $J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\dot{y}^2}dx$

Ahora aplicamos la ecuación de Euler-Lagrange:

(144) $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = 0$

Dado que

(146) $F = \sqrt{1+\dot{y}^2}dx \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 0$

Sustituyendo (146) en (144), obtenemos:

(149) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = 0$ ç

Recordemos:

(146) $F = \sqrt{1+\dot{y}^2}dx \Rightarrow$

(150) $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}}(1+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}}(2\dot{y}) = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}$

Sustituyendo (150) en (149), obtenemos:

(151) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = K_1 \Rightarrow \dot{y}^2 = K_1{}^2(1+\dot{y}^2) \Rightarrow \dot{y}^2(1-K_1{}^2) = K_1{}^2 \Rightarrow$

(152) $\dot{y}^2 = \frac{K_1{}^2}{(1-K_1{}^2)} = K_2{}^2 \Rightarrow \dot{y} = K_2 \Rightarrow$

(153) $y = K_2 x + K_3$

La función (153) representa una recta, lo que comprueba que la distancia más corta entre dos puntos en un plano es una recta.

3. La distancia más corta entre dos puntos en el espacio curvo (de cuatro dimensiones)

Espacio plano (2 dimensiones)	**Espacio curvo (4 dimensiones)**
$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$	(154) $(ds)^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$

$F = ds = \sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx$ (155) $F = \dfrac{ds}{d\tau} = \sqrt{g_{\mu\nu}\dfrac{dx^\mu}{d\tau}\dfrac{dx^\nu}{d\tau}} = \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}$ ***(Lagrangiana)***

$J = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx$ (156) $J = \int g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\,d\tau$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = 0$ (157) $\dfrac{\partial F}{\partial x^\alpha} - \dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = 0$ ***(Euler-Lagrange)***

Resolverlo: Resolverlo:

$y = K_2 x + K_3$ (158) $\dfrac{d^2x^\eta}{(d\tau)^2} + \Gamma^\eta_{\alpha\beta}\dfrac{dx^\mu}{d\tau}\dfrac{dx^\nu}{d\tau} = 0$ ***(la geodésica)***

Prueba:

(159) $$\frac{\partial F}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu)^{-\frac{1}{2}}[g_{\mu\nu,\alpha}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + g_{\mu\nu} * 0] = \frac{\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}{2F}g_{\mu\nu,\alpha}$$

(160) $$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{g_{\mu\nu}}{2F}\left(\frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial \dot{x}^\alpha}\dot{x}^\nu + \frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}^\alpha}\dot{x}^\mu\right) = \frac{g_{\mu\nu}}{2F}\left(\delta^\mu_\alpha\dot{x}^\nu + \delta^\nu_\alpha\dot{x}^\mu\right)$$
$$= \frac{1}{2F}(g_{\alpha\nu}\dot{x}^\nu + g_{\alpha\mu}\dot{x}^\mu) = \frac{1}{2F}(g_{\alpha\mu}\dot{x}^\mu + g_{\alpha\mu}\dot{x}^\mu) = \frac{\dot{x}^\mu}{F}g_{\alpha\mu}$$

en donde los tres factores dependen de τ .

(161) $$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{d}{d\tau}\frac{g_{\alpha\mu}\dot{x}^\mu}{F} = -\dot{F}\frac{g_{\alpha\mu}\dot{x}^\mu}{F^2} + \frac{dg_{\alpha\mu}}{d\tau}\frac{\dot{x}^\mu}{F} + \frac{g_{\alpha\mu}}{F}\ddot{x}^\mu$$

Por definición:

(162) $\dot{x}^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{d\tau} \Rightarrow \dot{x}^\nu = \dfrac{dx^\nu}{d\tau} \Rightarrow \dfrac{\dot{x}^\nu}{dx^\nu} = \dfrac{1}{d\tau}$ en donde τ es un parámetro cualquier

Combinando (161) y (162), obtenemos:

(163) $$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha} = -\dot{F}\frac{g_{\alpha\mu}\dot{x}^\mu}{F^2} + \frac{dg_{\alpha\mu}}{dx^\nu}\frac{\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}{F} + \frac{g_{\alpha\mu}}{F}\ddot{x}^\mu$$
$$= -\dot{F}\frac{g_{\alpha\mu}\dot{x}^\mu}{F^2} + g_{\alpha\mu,\nu}\frac{\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}{F} + \frac{g_{\alpha\mu}}{F}\ddot{x}^\mu$$

Combinando (157), (159) y (163), y multiplicando todos los términos con F obtenemos:

(164) $$\frac{\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}{2}g_{\mu\nu,\alpha} = g_{\alpha\mu,\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + g_{\alpha\mu}\ddot{x}^\mu - \dot{F}\frac{g_{\alpha\mu}\dot{x}^\mu}{F}$$

Ahora multiplicamos todo por $g^{\alpha\eta}$:

$$(165)\ \frac{\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}}{2} g^{\alpha\eta} g_{\mu\nu,\alpha} = g^{\alpha\eta} g_{\alpha\mu,\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} + g^{\alpha\eta} g_{\alpha\mu}\ddot{x}^{\mu} - \dot{F}\frac{g^{\alpha\eta} g_{\alpha\mu}\dot{x}^{\mu}}{F}$$

Aquí observamos, en los últimos dos términos, un factor delta δ_{μ}^{η} y reagrupamos los términos, para obtener:

$$(166)\ \ddot{x}^{\eta} = g^{\alpha\eta}(\frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} - g_{\alpha\mu,\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}) + \frac{\dot{F}}{F}\dot{x}^{\eta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\eta}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}(g_{\mu\nu,\alpha} - g_{\alpha\mu,\nu} - g_{\alpha\mu,\nu}) + \frac{\dot{F}}{F}\dot{x}^{\eta}$$

En el tercer término $g_{\alpha\mu,\nu}$, cambiamos los índices mudos, para quedar como $g_{\alpha\nu,\mu}$ y reconocemos el siguiente símbolo de Christoffel:

$$(167)\ \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\eta}(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha})$$

Sustituyendo (167) en (166), obtenemos:

$$(168)\ \ddot{x}^{\eta} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\dot{x}^{\eta}\dot{x}^{\nu} = \frac{\dot{F}}{F}\dot{x}^{\eta}$$

Ahora recuerda de (154) y (155) que $F = \frac{ds}{d\tau}$. Si parametrizamos con s de ds se sigue que:

$$(169)\, F = \frac{ds}{ds} \Rightarrow \dot{F} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{F}}{F}\dot{x}^{\eta} = 0$$

Combinando (168) y (169), obtenemos ***la geodésica*** con derivadas sobre la longitud de arco ds, también conocidas como ***"las ecuaciones de caída libre",***[1742] cuando la fuerza que actúa sobre el objeto es cero. El término del lado izquierdo representa la aceleración newtoniana tal como la conocemos en la ecuación $\overline{F}_{NEWTON} = m\overline{a}$. El término del lado derecho (un Christoffel multiplicado con el producto de la velocidad) representa la aceleración adicional debida a la curvatura del espacio, para darnos la (170 B):

$$(170\ A)\ \frac{d^2 x^{\eta}}{(ds)^2} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(170\ B)\ \overline{F}_{EINSTEIN} = m(\overline{a}_{NEWTON} + \overline{a}_{EINSTEIN}) = m\{\frac{d^2 x^{\eta}}{(ds)^2} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}\}$$

Ahora bien, recuerda que:

$$(171)\ -(dx^4)^2 = -(ds)^2 = -c^2(d\tau)^2 \Rightarrow c = \frac{ds}{d\tau}$$ en donde ds y $d\tau$ son invariantes, al igual que la velocidad de la luz c. Tomando en cuenta (54) y usando la regla de la cadena, obtenemos:

$$(172)\ \frac{d}{d\tau} = \frac{d}{ds}\frac{ds}{d\tau} = c\frac{d}{ds} \Rightarrow \frac{d}{ds} = \frac{d}{cd\tau}$$

[1742] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (1972): 185, ecuación 8.4.2

Sustituyendo (172) en (170) y multiplicando todos los términos con c^2, obtenemos ***la geodésica con derivadas sobre el tiempo propio*** $d\tau$ ***:***

(173) $$\frac{d^2 x^\eta}{(d\tau)^2} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

C 2. De la aproximación de campo débil a la gravitación Newtoniana.

Recordemos la ecuación de las geodésicas en un espacio curvo:

(173) $$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \qquad \alpha = 1,2,3,4 :$$

Las componentes espaciales de la ecuación anterior se describen por

(174) $$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad i = 1,2,3$$

y la componente temporal por

(175) $$\frac{d^2 x^4}{d\tau^2} + \Gamma^4_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad \alpha = 4$$

Para una partícula de baja velocidad (no-relativista: $u^i = \frac{dx^i}{dt} << c$), se puede sustituir $d\tau$ por dt en (174), para obtener:

(176) $$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \cong -\Gamma^i_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}$$

En esta aproximación las componentes espaciales de la cuadrivelocidad son despreciables comparadas con su componente temporal:

(177) $$\frac{dx^4}{dt} = c \Rightarrow \frac{dx^i}{dt} << \frac{dx^4}{dt}$$

De (176) y (177), obtenemos

(178) $$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \cong -\Gamma^i_{44} \frac{dx^4}{dt} \frac{dx^4}{dt} = -\Gamma^i_{44} c^2$$

C 3.- Aproximación de campo gravitacional débil

Recuerda que:

(179) $$\Gamma^\eta_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} g^{\gamma\eta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\eta} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \right) \Rightarrow$$

(180) $$\Gamma^i_{44} = \Gamma_{44\beta} g^{\beta i} = \frac{1}{2} g^{\beta i} \left(\frac{\partial g_{4\beta}}{\partial x^4} + \frac{\partial g_{\beta 4}}{\partial x^4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\beta} \right)$$

Consideremos ahora un campo gravitacional débil. En este caso la métrica puede escribirse como la métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, más un factor $h_{\mu\nu}$ que representa el campo gravitacional débil:

(181) $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$

(182) $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1...0...0.....0 \\ 0...1...0.....0 \\ 0...0...1.....0 \\ 0...0...0..-1 \end{pmatrix}$

Por consistencia tenemos, a partir de (181):

(183) $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \Rightarrow g^{\alpha\mu} g_{\mu\nu} = g^{\alpha\mu}\eta_{\mu\nu} + g^{\alpha\mu} h_{\mu\nu} \Rightarrow g^{\alpha}_{\nu} = \eta^{\alpha}_{\nu} + h^{\alpha}_{\nu} \Rightarrow$

$$g^{\nu\beta} g^{\alpha}_{\nu} = g^{\nu\beta}\eta^{\alpha}_{\nu} + g^{\nu\beta} h^{\alpha}_{\nu} \Rightarrow g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}$$

Sobre el campo gravitacional $h_{\mu\nu}$ hacemos esta hipótesis: los cambios temporales de $h_{\mu\nu}$ son mucho más pequeños que los cambios espaciales., es decir, ***las derivadas de*** $h_{\mu\nu}$ ***con respecto al tiempo son despreciables en comparación con sus derivadas con respecto al espacio***:

(184) $\dfrac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^4} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} << \dfrac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^i}$

Sustituimos (181) y (183) en (180), para obtener:

(185) $\Gamma^i_{44} = \dfrac{1}{2}(\eta^{\beta i} + h^{\beta i})(-\eta_{44,\beta} - h_{44,\beta} + \eta_{\beta 4,4} + h_{\beta 4,4} + \eta_{4\beta,4} + h_{4\beta,4})$

Las derivadas de $\eta_{\mu\nu}$ son derivadas de constantes y, por lo tanto, cero y las derivadas de los factores de corrección con respecto al tiempo $h_{\beta 4,4}$ y $h_{4\beta,4}$ son despreciables con respecto a la derivada espacial $h_{44,\beta}$. Por lo tanto, de (XIII) obtenemos:

(186) $\Gamma^i_{44} \cong \dfrac{1}{2}(\eta^{\beta i} + h^{\beta i})(-h_{44,\beta}) = -\dfrac{1}{2}\eta^{\beta i} h_{44,\beta} - h^{\beta i} h_{44,\beta}$

El último término de (186) es despreciable en comparación con el primero y por tanto

(187) $\Gamma^i_{44} \cong -\dfrac{1}{2}\eta^{\beta i}\dfrac{\partial h_{44}}{\partial x^{\beta}}$

Combinando (178) y (187), obtenemos:

(188) $\dfrac{d^2 x^i}{dt^2} \approx \dfrac{1}{2} c^2 \eta^{i\beta}\dfrac{\partial h_{44}}{\partial x^{\beta}}$

Ahora bien, $\eta^{i\beta}$ es un tensor métrico contravariante, $\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}$ es covariante, por lo tanto $\eta^{i\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}$ se transforma en contravariante por medio de la siguiente operación: $\eta^{i\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial}{\partial x_{i}}$, lo que nos permite simplificar (188) para obtener:

(189) $$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx \frac{1}{2}c^2 \frac{\partial h_{44}}{\partial x_i}$$

C 4. La gravitación Newtoniana

Dejemos ahora, un momento, a la ecuación de las geodésicas, para recordar algunos elementos de la teoría gravitacional de Newton. Primero definimos el campo gravitacional $\overline{g}$, a saber, la aceleración debida a la fuerza gravitacional:

(190) $$\overline{g} = \frac{\overline{F}}{m}$$

(191) $$\overline{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

De (190) y (191) obtenemos:

(192) $$\overline{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

Se puede demostrar que el vector $\overline{g}$ se puede escribir como el gradiente de un potencial escalar, es decir,

(193) $$\overline{g} = -\nabla\varphi$$

Ahora bien,

(194) $$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{\phi}$$

Pero φ en nuestro caso es una función solo de r y por lo tanto

(195) $\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r}$. Consecuentemente

(196) $$\overline{g} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r}$$

Combinando (192) y (195), obtenemos:

(197) $$\varphi = \int\frac{\partial\varphi}{\partial r}dr = GM\int_R^{\infty} r^{-2}dr = GM(r^{-1}\Big|_R^{\infty}) = -\frac{GM}{R}$$

En notación tensorial la ecuación de movimiento que incluye el campo gravitacional débil es

(198) $\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$

Recordemos ahora las componentes espaciales de la geodésica

(199) $\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx \frac{1}{2}c^2\frac{\partial h_{44}}{\partial x_i}$

De comparar (198) y (199) concluimos:

(200) $\frac{1}{2}c^2 h_{44} = -\varphi \quad \Rightarrow h_{44} = -\frac{2}{c^2}\varphi$

Por consiguiente las componentes espaciales de la ecuación de la geodésica, en las aproximaciones de campo débil y bajas velocidades, se reducen a la ecuación de movimiento para la gravitación Newtoniana si hacemos la identificación de la ecuación (200).

De (181) y (200) obtenemos:

(201) $g_{44} = \eta_{44} + h_{44} = -1 - \frac{2\varphi}{c^2}$

De (197) y (201) obtenemos:

(202) $g_{44} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2R}\right)$

Con base en todo lo anterior, obtenemos la métrica para una partícula de baja velocidad en un campo gravitacional débil:

(203) $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1...0...0..............0 \\ 0...1...0..............0 \\ 0...0...1..............0 \\ 0...0...0..-1+\frac{2GM}{c^2R} = -(1+\frac{2\varphi}{c^2}) \end{pmatrix}$ (tensor métrico en campo gravitacional débil)

C5. De la métrica a la teoría Newtoniana

Partimos de la métrica (203) y estamos en la aproximación de bajas velocidades sin hacer explícita de principio la hipótesis del campo gravitacional débil. Las componentes no nulas del símbolo de Christoffel para la métrica (203) son:

(180) $\Gamma^i_{44} = \Gamma_{44\beta}g^{\beta i} = \frac{1}{2}g^{\beta i}\left(\frac{\partial g_{4\beta}}{\partial x^4} + \frac{\partial g_{\beta 4}}{\partial x^4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\beta}\right) \Rightarrow$

(204) $\Gamma^i_{44} = -\frac{1}{2}g^{\beta i}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^\beta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_i}$

Recordemos las componentes espaciales de la ecuación de la geodésica para una partícula de baja velocidad:

$$(178)\quad \frac{d^2x^i}{dt^2} \cong -\Gamma^i_{44}\frac{dx^4}{dt}\frac{dx^4}{dt} = -\Gamma^i_{44}c^2$$

De (178) y (204) se obtiene:

$$(205)\quad \frac{d^2x^i}{dt^2} \cong \frac{c^2}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_i}$$

Sustituyendo $g_{44} = -1 - \frac{2\varphi}{c^2}$ en (197), se concluye que:

$$(206)\quad \frac{d^2x^i}{dt^2} \cong -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

Escribimos esta última ecuación en forma vectorial:

$$(207)\quad \overline{a} = -\nabla\varphi$$

Como $\varphi = -\frac{GM}{r}$ es función solo de r entonces $\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r}$ y

$$(208)\quad \overline{a} = G\,M\,\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}r^{-1} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}\,,$$

Por lo tanto hemos verificado que las componentes espaciales de la ecuación de la las geodésicas con la métrica (203) corresponden a la ecuación de movimiento del campo gravitacional Newtoniano.

La cuarta componente de la geodésica es:

$$(209)\quad \frac{d^2x^4}{dt^2} \approx -\Gamma^4_{44}c^2$$

De (187) y (197) y (200) se obtiene:

$$(210)\quad \Gamma^4_{44} \cong -\eta^{\beta 4}\frac{GM}{c^2}\frac{\partial(R^{-1})}{\partial x^4} = 0$$

Dado que $\Gamma^4_{44} = 0$, se sigue que:

$$(211)\quad \frac{d^2x^4}{dt^2} = 0$$, lo que era de esperarse dado que $\frac{dx^4}{dt} = c$

Interpretación: Esto significa que $x^4 = at + b$, con $a = c$ y $b = 0$. La cuarta componente de la ecuación de las geodésicas indica que la velocidad de los fotones de la luz es c.

En Minkowski, $\gamma = 1 \Rightarrow$

(212) $v^4 = c\gamma = c \Rightarrow mcv^4 = mc^2 = E \Rightarrow v^4 = \frac{E}{mc}$

D. LA GRAVITACIÓN NEWTONIANA EXPRESADA COMO TEORÍA DE CAMPO

Primero analizaré el campo gravitacional débil para una sola partícula (D.1) y después generalizaremos el análisis para una distribución de masa arbitraria (D.2).

D1. Campo gravitacional newtoniano para una sola partícula

Recordemos la fuerza gravitacional y el campo gravitacional de la teoría newtoniana

(213) $\overline{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$

(214) $\overline{g} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{r}$,

en donde $\overline{g}(\overline{x})$ *es el campo de una partícula con masa* m*, localizada en el punto* $\overline{x}' = (x', y', z')$ *(la fuente) y medimos el campo gravitacional en el punto* $\overline{x} = (x, y, z)$ *de manera que* $r = |\overline{r}| = |\overline{x} - \overline{x}'|$ *y* $\overline{r} = \overline{x} - \overline{x}'$

Aplicamos ahora el teorema de Helmholtz al campo gravitacional de la partícula, a partir de (214):

(215) $\nabla \bullet \overline{g} = \nabla \bullet -Gm\{\frac{\hat{r}}{r^2}\}$ y $\nabla \times \overline{g} = -Gm\nabla \times \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)$

Introducimos la delta de Dirac $\delta(\overline{r})$ y la densidad de masa $\rho(\overline{x})$ asociada a una partícula con masa m:

(216) $\nabla \bullet \{\frac{\hat{r}}{r^2}\} = 4\pi\delta$

(217) $\rho = m\delta \Rightarrow \delta = \frac{\rho}{m}$

Sustituimos (216) y (217) en (215) para obtener:
(218) $\nabla \bullet \overline{g} = -4\pi G\rho$

Por otra parte

(219) $\nabla \times \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 0$

y, por lo tanto, por (159) y (163):
(220) $\nabla \times \overline{g} = 0$

D 2. El campo gravitacional para una distribución de masa arbitraria

Cuando queremos generalizar a partir de un caso particular, hemos de sacar los diferenciales y luego integrar. Sacamos el diferencial de $\overline{g}$, a partir de (214):

(221) $d\bar{g} = -\frac{G\hat{r}}{r^2}dm$

Por definición, la densidad de masa es:

(222) $\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV$ (en donde V es el volumen)

Sustituimos (222) en (221), para obtener:

(223) $d\bar{g} = -\frac{G\hat{r}}{r^2}\rho dV$

Ahora integramos:

(224) $\bar{g}(x,y,z) = -G\int \rho(x',y',z')\frac{\hat{r}}{r^2}dV$, en donde $dV = dx' * dy' * dz'$

Esta ecuación (224) representa ***el campo gravitacional débil*** producido por una distribución arbitraria de masa ρ . Aplicando nuevamente el teorema de Helmholtz, ahora a la (224):

(225) $\nabla \bullet \bar{g} = -G\int \rho \nabla \bullet \frac{\hat{r}}{r^2}dV = -G\int \rho\, 4\pi\delta\, dV = -4\pi G\int \rho\, \delta\, dV = -4\pi\, G\rho$

Vemos que la (218) es igual a la (225), pero la densidad ρ en el primer caso es la de la masa de una sola partícula, y en el segundo caso la distribución arbitraria de una masa. A continuación integramos la (225) sobre dV :

(226) $\int(\nabla \bullet \bar{g})dV = -4\pi G\int \rho dV$

Por el teorema de Gauss, consta que:

(227) $\int_V \nabla \bullet \bar{g}dV = \int_S \bar{g} \bullet d\bar{S}$

Sustituimos la (227) en la (226) para obtener la (228):

(228) $\int \bar{g}\, d\bar{S} = -4\pi\, G\int \rho\, dV = -4\pi\, G\int dm = -4\pi\, G\, m$

Este resultado, lo podemos corroborar independientemente, resolviendo la integral del lado izquierdo. Recordemos el vector de posición en coordenadas polares esféricas:

(229) $\bar{r} = \cos\theta sen\phi\hat{i} + sen\theta sen\phi\hat{j} + \cos\phi\hat{k}$

Por lo tanto:

(230) $\bar{T}_\theta = \frac{\partial x^i(\theta,\phi)}{\partial\theta} = -sen\theta sen\phi\hat{i} + \cos\theta sen\phi\hat{j} + 0\hat{k}$

(231) $\bar{T}_\phi = \frac{\partial x^i(\theta,\phi)}{\partial\phi} = \cos\theta\cos\phi\hat{i} + sen\theta\cos\phi\hat{j} - sen\phi\hat{k}$

De (230) y (231), obtenemos:
(232) $\left|\overline{T}_\theta \times \overline{T}_\phi\right| = sen\phi$

Recordemos también que:
(233) $dS = r^2\left|\overline{T}_\theta \times \overline{T}_\phi\right| d\theta d\phi = r^2 sen\phi d\theta d\phi$

Ahora bien:
(234) $d\overline{S} = \hat{r} dS \;\Rightarrow\; \hat{r} \bullet d\overline{S} = (\hat{r} \bullet \hat{r}) dS = dS$

Sustituimos (214), (233) y (234) en (228):
(235) $\int \overline{g} \bullet d\overline{S} = -Gm\int \frac{\hat{r}}{r^2} \bullet d\overline{S} = -Gm\int \frac{1}{r^2} dS = -Gm\int sen\phi d\theta d\phi = -GM\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi = -4\pi Gm$

El flujo, es decir, ***el campo por superficie***, es proporcional a la masa que está en el centro de la esfera. Recordemos:
(236) $\overline{g} = -\nabla\varphi$

De (236) obtenemos:
(237) $\nabla \bullet \overline{g} = \nabla \bullet (-\nabla\varphi)$

Recordemos la definición de la ***Laplaciana del campo newtoniano:***
(238) $\nabla \bullet (\nabla\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla^2\varphi$
(218) $\nabla \bullet \overline{g} = -4\pi G\rho$

De (237), (238) y (218) obtenemos la ecuación que representa ***la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional:***
(239) $\nabla^2\varphi = 4\pi\, G\, \rho$

E. EL FLUIDO PERFECTO

Un fluido perfecto en la relatividad general es definido como un fluido no viscoso y que no conduce calor. Se representa por ***el tensor energía-momento*** $T^{\mu\nu}$, en donde μ es el momento y ν la superficie, es decir, se trata del flujo de la componente del cuadrivector momento p^μ a través de una superficie de x^ν constante:
(240) $p^\mu \equiv (p^i, p^4); p^4 = \frac{E}{c}$

(241) $T^{\mu\nu} = \rho u^{\mu}u^{\nu} + \frac{P}{c^2}u^{\mu}u^{\nu} + Pg^{\mu\nu}$ (nota 1743)

En un sistema de coordenadas en reposo, T^{44}, T^{4j}, T^{i4} y T^{ij} representan cosas diferentes, a saber:

1) El tensor T^{44} es ***el flujo de la componente cuatro del momento***, $p^4 = \frac{E}{c}$ a través de la superficie x^4=constante y representa la ***densidad de energía.***
2) El tensor T^{4j} es ***el flujo de la componente cuatro del momento***, $p^4 = \frac{E}{c}$, a través de una superficie x^i=constante. En particular T^{4i} puede representar la energía cinética o ***conducción de calor.***
3) El tensor T^{i4} es ***el flujo de las componentes espaciales del momento*** p^i , a través de una superficie x^4=constante que es un punto en el tiempo. T^{i4} ***es equivalente a*** T^{4j} por la simetría del tensor**.**
4) El tensor T^{ij} representa el *stress,* a saber, ***las fuerzas de fricción entre elementos adyacentes del flujo, por ejemplo la viscosidad***. Se trata del flujo de las componentes del momento p^i a través de una superficie x^j=constante.

Ahora bien, en un fluido perfecto, las respectivas ecuaciones, a partir de (241) (y tomando en cuenta que ***en un sistema momentáneamente en reposo*** $u^i = u^j = 0$, $\gamma = 1$, $g^{4j} = g^{i4} = 0$ y que $u^4 = c \Rightarrow u^4u^4 = c^2$ y $g^{44} = -1$), son:

(242) $T^{44} = \rho u^4u^4 + \frac{P}{c^2}u^4u^4 + Pg^{44} = \rho c^2 + P - P = \rho c^2 \Rightarrow \quad T^{44} = \rho c^2$ [1744] (esta componente del tensor es independiente).

(243) $T^{4j} = \rho u^4u^j + \frac{P}{c^2}u^4u^j + Pg^{4j} = 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow T^{4j} = 0$ (sin conducción de calor).

(244) $T^{i4} = 0$

Dado que estamos en el supuesto de reposo, las partículas no chocan, de modo que la ecuación (244) expresa que no hay energía cinética, es decir, no hay conducción de calor.

(245) $T^{ij} = P\delta^{ij}$ (δ es la delta de Kronecker).

La ecuación (245) expresa que no hay viscosidad. Este tensor tiene una componente independiente (cuando hay viscosidad, en general son 6 componentes independientes). Las ecuaciones (242) a (245) representan ***el siguiente tensor (246) de energía-momento*** $T^{\mu\nu}$ ***para el caso particular de un fluido perfecto y relativista***. Este tensor es simétrico, en cuatro dimensiones, con 2 componentes independientes.

[1743] Hans Stephani, *General Relativity,* 2nd ed.(1990): 83; Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (1972): 471, ecuación 15.1.12; NB Weinberg estandariza las ecuaciones con $c = 1$, de modo que $pu_{\mu}u_{\nu}$ en Weinberg es $\frac{p}{c^2}(u_{\mu}u_{\nu})$ en mi apéndice

[1744] Hans Stephani, *General Relativity,* 2nd ed.(1990): 83, ecuación 8.84

$$(246)\ T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} P.....0.....0.....0 \\ 0.....P.....0.....0 \\ 0.....0.....P.....0 \\ 0.....0.....0.....\rho c^2 \end{pmatrix}$$

F. EL TENSOR DE EINSTEIN

F1.- Ecuación del campo débil

Recordemos (238), (239) y (242):

$$(238)\nabla \bullet (\nabla\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla^2\varphi$$

$$(239)\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$$

$$(242)\ T^{44} = \rho c^2$$

De $g_{44} = (-1 - \frac{2\varphi}{c^2})$ y (238), (239), y (242) obtenemos:

$$(247)\nabla^2 g_{44} = \nabla^2(-1 - \frac{2\varphi}{c^2}) = -\frac{2}{c^2}\nabla^2\varphi = -\frac{2}{c^2}(4\pi G\rho) = -\left(-8\pi G\frac{T_{44}}{c^4}\right)$$

Definimos:

$$(248)\ \kappa = -\frac{8\pi G}{c^4}$$

De (247) y (248) obtenemos:

$$(249)\ \nabla^2 g_{44} = \kappa T_{44}$$

Esta es la ecuación de campo en el límite newtoniano, en donde el término al lado izquierdo representa la geometría y el término al lado derecho la masa. La ecuación (249) nos dice que la masa representada por la componente T_{44} del tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$ origina la componente g_{44} de la métrica asociada al campo débil gravitacional a velocidades bajas, comparadas con la de la luz. La componente g_{44} genera un campo gravitacional observable, representado por el vector

$$(250)\, g^i = \frac{c^2}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_i}$$

Comparemos las ecuaciones (239) y (249) y señalamos que ambas fórmulas admiten una interpretación diferente.

$$(239)\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$$

(243) $\nabla^2 g_{44} = \kappa T_{44}$
(251) $\nabla^2 \varphi = 4\pi G\rho \Leftrightarrow \nabla^2 g_{44} = \kappa T_{44}$

La ecuación (239) dice que la masa (representada por el escalar ρ) produce un potencial gravitacional (representado por el escalar φ) que a su vez genera un campo gravitacional observable (representado por el vector $\bar{g} = -\nabla\varphi$):
ρ (masa observable) $\rightarrow$ φ (potencial no observable) $\rightarrow$ $\bar{g}$ (campo observable)

La ecuación (249) originada en forma aproximada por la teoría del campo débil, pertenece a las teorías de acción instantánea a distancia (que postulan que causa y efecto son simultáneas en el tiempo, lo que viola el principio metafísico de la causalidad (la causa precede al efecto). Es importante notar que en la teoría gravitacional del campo débil, las funciones g_{44} (componente de la métrica) y g^i (campo observable) dependen en forma aproximada de la posición y no del tiempo. También es necesario subrayar que en la aproximación del campo débil, el tamaño de las masas y, por lo tanto, de los campos, tienen un límite:
T_{44} (masa observable) $\rightarrow$ g_{44} (componente de la métrica) $\rightarrow$ g^i (campo observable)

Sin embargo, si eliminamos la restricción-simplificación de $\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^4} = 0$, entonces la teoría del campo gravitacional débil pertenece a la teoría general del campo gravitacional con propagación finita de causa $\rightarrow$ efecto (la velocidad de la luz), la cual no viola el principio de la causalidad. En este último caso las ecuaciones de campo son ecuaciones de onda, y la (249) se transforma en (252):

$$(252)\quad \nabla^2\{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial(h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h^{\sigma}_{\sigma})}{\partial t^2}\} = KT^{\alpha\beta}$$

La ecuación (252) es ***la ecuación de onda en general, sin el límite newtoniano,*** donde el término al lado izquierdo representa el campo débil y el término al lado derecho la masa.

F2. Ecuación de campo generalizado

La ecuación (251) sugiere una generalización para campos no débiles y altas velocidades, la cual podría escribirse como:
(253) $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$

en donde el tensor del campo gravitacional $G_{\mu\nu}$ representa al campo gravitacional (la geometría), y el tensor $T_{\mu\nu}$ representa a todas las energías y momentos (excepto las de origen gravitacional). Obviamente, ***para campos débiles y bajas velocidades se da la siguiente reducción:*** $G_{\mu\nu} \Rightarrow \nabla^2 g_{44}$***, lo que implica que el rango máximo de las derivadas con respecto a*** x^α ***debe ser y es de dos.*** $G_{\mu\nu}$ ***debe ser un tensor*** que va a construirse con el tensor de Riemann

$R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}$, más específicamente con el tensor de Ricci $R_{\alpha\gamma} = R^{\beta}_{\alpha\beta\gamma}$ y el tensor de curvatura R, que son las únicas contracciones independientes del tensor de Riemann $R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}$. Podemos, entonces, hacer la siguiente ***hipótesis (propuesta) para el tensor de Einstein*** (k & b son constantes):

(254) $G_{\mu\nu} = kR_{\mu\nu} + bg_{\mu\nu}R$

El tensor $G_{\mu\nu}$ ***es necesariamente simétrico***, porque la suma de dos tensores simétricos es un tensor simétrico y los tensores $R_{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$ son simétricos:

(255) $R_{\mu\nu} = g^{\alpha\eta}R_{\eta\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\eta}R_{\alpha\iota\eta\mu} = R_{\nu\mu}$

(256) $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$

De (254), (255) y (256), obtenemos la (257) que expresa que $G_{\mu\nu}$ es simétrico:

(257) $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$

Ahora bien, recordemos la identidad de Bianchi:

(258) $(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{;\nu} = 0$

De (258), obtenemos:

(259) $kR^{\mu\nu}_{;\nu} - \frac{1}{2}kg^{\mu\nu}R_{;\nu} = 0$

De (254) obtenemos:

(260) $G^{\mu\nu}_{;\nu} = kR^{\mu\nu}_{;\nu} + bg^{\mu\nu}R_{;\nu}$

Para que $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, como debe de ser, obtenemos, a partir de (259) y (260):

(261) $b = -\frac{1}{2}k$

De (254) y (261) obtenemos:

(262) $G_{\mu\nu} = k(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)$

De (253) y (262) obtenemos:

(263) $k(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = \kappa T_{\mu\nu}$

Para determinar el valor de k, la ecuación (263) en la aproximación del campo débil y bajas velocidades, debe reducirse a la forma que ya vimos arriba:

(249) $\nabla^2 g_{44} = \kappa T_{44}$

De (263), obtenemos:

$$(264)\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{\kappa}{k} T_{\mu\nu}$$

La componente G_{44} de esta ecuación es:

$$(265)\ G_{44} = R_{44} - \frac{1}{2} g_{44} R = \frac{\kappa}{k} T_{44}$$

En la aproximación del campo débil y bajas velocidades:

$$(266)\ g_{44} = \eta_{44} + h_{44} = -1 + h_{44} = -1 - \frac{2\varphi}{c^2}$$

Combinando (265) y (266), obtenemos:

$$(267)\ R_{44} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} h_{44}) R = \frac{\kappa}{k} T_{44}$$

Ahora bien, el término $h_{44}R$ está formado de sumandos que son productos del campo débil y sus derivadas y por lo tanto, se puede ignorar, lo que transforma la (267) en la siguiente ecuación:

$$(268)\ R_{44} + \frac{1}{2} R \cong \frac{\kappa}{k} T_{44}$$

Ahora hay que calcular R_{44} y $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$. Recordemos el tensor de Riemann, los símbolos de Christoffel y el tensor métrico[1745]

$$(269)\ R^{\lambda}_{\alpha\beta\kappa} = \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\kappa,\beta} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\,\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\beta\eta}$$

$$(270)\ \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} g^{\gamma\eta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\eta} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} \right) = \frac{1}{2} g^{\gamma\eta} \left(g_{\beta\gamma,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\gamma} \right)$$

$$(271)\ \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta,\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\gamma\eta}}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} \right) + \frac{1}{2} g^{\gamma\eta} \left(\frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\sigma}} \right)$$

$$(272)\ g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \Rightarrow g_{44} = \eta_{44} + h_{44} = -1 - \frac{2\varphi}{c^2}$$

Para obtener ***este tensor en su aproximación al campo débil***, hemos de tomar en cuenta algunos puntos:

a.- el tensor de Riemann R está constituido por símbolos de Christoffel Γ;
b.- los símbolos de Christoffel están constituido por términos con derivadas de g
c.- los tensores métricos g están constituidos por la constante η de la métrica de Minkowski y h
d.- las derivadas de la constante η son cero;
e.- los productos $\Gamma\Gamma$ son en última instancia productos de derivadas de h y, en el caso

[1745] Hans Stephani, *General Relativity,* 2nd ed.(1990)

de campo débil y baja velocidad, pueden ser ignoradas;

f.- los términos $h_{44}R$ y $h^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, etcétera, también son cuadráticos y pueden ser ignorados por la misma razón expuesta en e.

g.- para no escribir tanto, se usa la siguiente anotación:

$$h_{\alpha\nu,\mu,\beta} = \frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\beta}}; \text{ y } \quad h^{\alpha}_{\beta,\mu,\nu} = \frac{\partial h^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}; \quad \text{y} \quad h^{,\alpha}_{\mu\nu,\beta} = \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}\partial x_{\alpha}}; \; h^{,i}_{44,i} = \frac{\partial h_{44}}{\partial x^{i}\partial x_{i}}; \text{ etcétera}$$

h.- hay que recordar $A^{\alpha}_{\beta,\alpha} = A^{,\alpha}_{\alpha\beta}$

i.- hay que recordar que $\eta^{\alpha\sigma}h_{\sigma\beta} = h^{\alpha}_{\beta}$, de modo que $\eta^{4\sigma}h_{\sigma 4} = \eta^{44}h_{44} + \eta^{4i}h_{i4} = h^{4}_{4} + 0 = h^{4}_{4}$ y dado que $\eta_{44} = -1$, se sigue que $-h_{44} = h^{4}_{4}$

j.- $h^{\alpha\mu}_{,\mu,\alpha} = h^{\nu\mu}_{,\mu,\nu} = h^{\nu\alpha}_{,\alpha,\nu} = h^{\nu\alpha}_{,\nu,\alpha} = h^{\nu,\alpha}_{\alpha,\nu}$

k.- $\eta^{\mu\nu}h^{\alpha}_{\alpha,\mu,\nu} = \eta^{\mu\nu}\dfrac{\partial^2 h^{\alpha}_{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = \dfrac{\partial^2 h^{\alpha}_{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x_{\mu}} = h^{\alpha,\mu}_{\alpha,\mu} = h^{\mu,\alpha}_{\mu,\alpha}$

l.- las derivadas sobre x^4 son cero

m.- usamos la siguiente métrica:

$$(272)\quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \begin{pmatrix} 1+\frac{2\varphi}{c^2}\text{......}0\text{..........}0\text{............}0 \\ \text{....}0\text{.....}1+\frac{2\varphi}{c^2}\text{........}0\text{............}0 \\ \text{....}0\text{........}0\text{.......}1+\frac{2\varphi}{c^2}\text{..........}0 \\ \text{.....}0\text{........}0\text{...........}0\text{.....}-(1+\frac{2\varphi}{c^2}) \end{pmatrix}$$

En la aproximación de campo débil el tensor de Riemann, en términos de h, es:

$$(273)\; R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\mu,\beta} + h_{\mu\beta,\nu,\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha,\beta} - h_{\alpha\beta,\mu,\nu})$$

Subimos el índice α en la ecuación (273):

$$(274)\; R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu} = \frac{1}{2}(h^{\alpha}{}_{\nu,\mu,\beta} + h_{\mu\beta,\nu}{}^{,\alpha} - h_{\mu\nu,}{}^{,\alpha}{}_{,\beta} - h^{\alpha}{}_{\beta,\mu,\nu})$$

Contraemos (274) haciendo $\beta = \alpha$ [1746] y obtenemos ***el tensor de Ricci:***

$$(275)\; R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = \frac{1}{2}(h^{\alpha}{}_{\nu,\mu,\alpha} + h_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} - h^{\alpha}{}_{\alpha,\mu,\nu}) \equiv R_{\mu\nu}$$

[1746] Murray Spiegel, *Análisis vectorial y una introducción al análisis tensorial* (2005): 169, no. 4

Con la (275) y tomando en cuenta que las derivadas sobre x^4 son cero (punto l), y que $h_{44} = -\frac{2\varphi}{c^2}$, calculamos R_{44} y R:

$$(276)\, R_{44} = \frac{1}{2}(h^{\alpha}{}_{4,4,\alpha} + h_{4\alpha,4}{}^{,\alpha} - h_{44,}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} - h^{\alpha}{}_{\alpha,4,4}) = -\frac{1}{2}h_{44,}{}^{\alpha}{}_{\alpha}$$

$$= -\frac{1}{2}(h^{4}_{44,4} + h^{i}_{44,i}) = -\frac{1}{2}h_{44}{}^{,i}{}_{,i} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{44} = \frac{1}{c^2}\nabla^2\varphi$$

Para calcular R, recordemos el punto f y la ecuación (272) que dice que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ y $g_{44} = \eta_{44} + h_{44}$:

$$(277)\, R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = (\eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu})R_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + h^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \cong \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

Con (275) y (277) y tomando en cuenta los puntos (b) hasta (l), construimos el escalar de curvatura R:

$$(278)\; R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h^{\alpha}{}_{\nu,\mu,\alpha} + h_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} - h^{\alpha}{}_{\alpha,\mu,\nu}) =$$

$$= \frac{1}{2}(h^{\alpha\mu}_{,\mu,\alpha} + h^{\nu,\alpha}_{\alpha,\nu} - h^{\mu,\alpha}_{\mu,\alpha} - \eta^{\mu\nu}h^{\alpha}_{\alpha,\mu,\nu}) = \frac{1}{2}(2h^{\alpha\mu}_{,\mu,\alpha} - 2h^{\mu,\alpha}_{\mu,\alpha}) = (h^{\alpha\mu}_{,\mu,\alpha} - h^{\mu,\alpha}_{\mu,\alpha}) =$$

$$= (h^{4\mu}_{,\mu,4} + h^{i\mu}_{,\mu,i} - h^{\mu,4}_{\mu,4} - h^{\mu,i}_{\mu,i}) = (h^{i4}_{,4,i} + h^{ij}_{,j,i} - h^{4,i}_{4,i} - h^{j,i}_{j,i}) = (h^{ij}_{,j,i} - h^{4,i}_{4,i} - h^{j,i}_{j,i})$$

Veamos por separados los tres términos del lado derecho en las siguientes ecuaciones (279), (280) y (281):

$$(279)\; h^{ij}_{,j,i} = h^{11}_{.1.1} + h^{22}_{,2,2} + h^{33}_{,3,3}$$

$$(280)\; -h^{4,i}_{4,i} = +h^{;i}_{44,i} = \nabla^2 h_{44} = -\frac{2}{c^2}\nabla^2\varphi$$

$$(281)\; -h^{j,i}_{j,i} = -h^{;1}_{11,1} - h^{;2}_{11,2} - h^{;3}_{11,3} - h^{;1}_{22,1} - h^{;2}_{22,2} - h^{;3}_{22,3} - h^{;1}_{33,1} - h^{;2}_{33,2} - h^{;3}_{33,3}$$

Los tres términos del lado derecho de (279) y el primer, quinto y noveno término del lado derecho de (281) se anulan. Los seis términos de la (281) que quedan se pueden simplificar, porque $h_{11} = h_{22} = h_{33} = h_{aa} = +\frac{2\varphi}{c^2}$, de modo que (279), (280) y (281) se suman como:

$$(282)\; R = h^{ij}_{,j,i} + h^{;i}_{44,i} - h^{j,i}_{j,i} = h^{;i}_{44,i} - 2h^{;i}_{aa,i} = \nabla^2 h_{44} - 2\nabla^2 h_{aa} = -\frac{2}{c^2}\nabla^2\varphi - \frac{4}{c^2}\nabla^2\varphi = -\frac{6}{c^2}\nabla^2\varphi$$

Sustituyendo la (276) y la (282) en la (268), obtenemos:

$$(283)\; R_{44} + \frac{1}{2}R = \frac{1}{c^2}\nabla^2\varphi - \frac{3}{c^2}\nabla^2\varphi = -\frac{2}{c^2}\nabla^2\varphi = \frac{\kappa}{k}T_{44} \Rightarrow \nabla^2\varphi = -\frac{c^2}{2}\frac{\kappa}{k}T_{44}$$

Recordemos:

$$(242)\; T^{44} = \rho c^2$$

(248) $\kappa = -\frac{8\pi G}{c^4}$

De (283), (242) y (248), se obtiene:

(284) $\nabla^2\varphi = (-\frac{c^2}{2})(-\frac{8\pi G}{kc^4}\rho c^2) = \frac{4\pi G\rho}{k}$

Recordemos la Laplaciana para el campo newtoniano:

(239) $\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$

De (239) y (284), obtenemos:

(285) $k = 1$

Recordemos (262) y (263):

(262) $G_{\mu\nu} = k(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)$

(263) $k(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = \kappa T_{\mu\nu}$

Sustituyendo (285) en (262) y (263), obtenemos ***el tensor de Einstein***:

(286) $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \Rightarrow G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \kappa T^{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$

La ecuación (286) es ***el tensor de Einstein.***[1747] Sin embargo, presentamos en la sección K de este apéndice el modelo Lemaître con constante cosmológica positiva y $k = +1$, para entender la esencia de estas especulaciones sobre la constante cosmológica.

Si sacamos ***la derivada contravariante de la ecuación de Einstein (286), verificamos la consistencia geométrica de esta ecuación con la identidad de Bianchi (116) y la consistencia física de la misma ecuación de Einstein con el axioma de la conservación de la energía-momento:***

(116) $(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{;\nu} = 0 = \kappa T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$

(287) resultado geométrico: $(G^{\mu\nu})_{;\nu} = 0$

(288) resultado físico: $\kappa(T^{\mu\nu})_{;\nu} = 0$

G. LA MÉTRICA FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER

Principio cosmológico: universo es homogéneo (invariante en traslaciones) e isotrópico (invariante en rotaciones).

[1747] Menos la constante cosmológica $\Lambda g_{\mu\nu}$ que omitimos aquí por su status especulativo: véase la Sección 15 de este libro

Plasmamos la expansión del universo y el principio cosmológico en una sola ecuación:
(289) $ds^2 = a^2 d\sigma^2 - c^2 dt^2$

en donde $a(t)$ es la magnitud de la aceleración (=expansión) y $d\sigma$ representa las tres componentes espaciales, que deben de tener máxima simetría (por el principio cosmológico) y cualquier curvatura (+, -, 0).

Hay varias maneras de calcular $d\sigma^2$ con espacio curva y máxima simetría. Una manera es la siguiente:
(290) $d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + K^{-1} d\omega^2$

donde:
a) μ y ν pueden correr de 1, 2, 3 ...... n
b) el término $K^{-1}\omega^2$ es la última componente espacial (no es la componente temporal), por ejemplo la tercera o la cuarta
c) $\gamma_{\mu\nu} = \dfrac{\delta_{\mu\nu}}{|K|}$
d) $\delta_{\mu\nu}$ es la delta de Kronecker
e) K es una constante que tiene que ver la curvatura del espacio

La ecuación de una esfera es:
(291) $\gamma_{\mu\nu} x^\mu x^\nu + K^{-1}\omega^2 = K^{-1}$

Despejamos en (291) ω^2:
(292) $\omega^2 = 1 - K\gamma_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$

Derivar (292):
(293) $2\omega d\omega = -K\gamma_{\mu\nu}(x^\mu dx^\nu + x^\nu dx^\mu)$

Dado que $x^\mu dx^\nu = x^\nu dx^\mu$, se sigue que:
(294) $\omega d\omega = -K\gamma_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu \Rightarrow d\omega = -K\gamma_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu / \omega$

De (294) se despeja $d\omega^2$
(295) $d\omega^2 = [K^2 (\gamma_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu)^2] / \omega^2$

Sustituyendo (292) en (295), obtenemos:
(296) $d\omega^2 = K^2 \dfrac{(\gamma_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu)^2}{1 - K\gamma_{\mu\nu} x^\mu x^\nu}$

Sustituimos (296) en (290):

(297) $d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + K \dfrac{(\gamma_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu)^2}{1 - K\gamma_{\mu\nu} x^\mu x^\nu}$

Dado que $\gamma_{\mu\nu} = \dfrac{\delta_{\mu\nu}}{|K|}$, reescribimos (297) como:

(298) $d\sigma^2 = \dfrac{\delta_{\mu\nu}}{|K|} dx^\mu dx^\nu + \dfrac{K}{|K|^2} \dfrac{(\delta_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu)^2}{1 - \dfrac{K}{|K|}\delta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu}$

Reescribimos (298) como:

(299) $d\sigma^2 = \dfrac{1}{|K|}[\delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \dfrac{K}{|K|} \dfrac{(\delta_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu)^2}{1 - \dfrac{K}{|K|}\delta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu}]$

Definimos un nuevo k *que no debe confundirse con el* k *anterior*.

(300) $k = \dfrac{K}{|K|}$

Por lo tanto:

(301) $K > 0 \Rightarrow k = 1$ (caso del universo cerrado)
(302) $K < 0 \Rightarrow k = -1$ (caso del universo abierto)
(303) $K = 0 \underset{definición}{\Rightarrow} k = 0$ (caso del universo plano)

Se sustituye (300) en (299):

(304) $d\sigma^2 = \dfrac{1}{|K|}[\delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + k \dfrac{(\delta_{\mu\nu} x^\mu dx^\nu)^2}{1 - k\delta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu}]$

La ecuación (304) representa la parte espacial de la métrica de Friedmann-Robertson-Walker. Para tres dimensiones, los índices corren de 1 a 3 (m=1, 2, 3; n=1, 2, 3):

(305) $d\sigma^2 = \dfrac{1}{|K|}[\delta_{mn} dx^m dx^n + k \dfrac{(\delta_{mn} x^m dx^n)^2}{1 - k\delta_{mn} x^m x^n}]$

Partimos del supuesto de coordenadas esféricas, con tres dimensiones espaciales:

(306) $x^1 = rsen\theta\cos\phi$, $dx^1 = dr$
(307) $x^2 = rsen\theta sen\phi$, $dx^2 = d\theta$
(308) $x^3 = r\cos\theta$, $dx^3 = d\phi$

(309) $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1.......0........0 \\ 0.......r^2......0 \\ 0.......0........r^2 sen^2\theta \end{pmatrix}$

De (306), (307) y (308) se obtienen (310), (311) y (312):

(310) $\delta_{mn} x^m dx^n = rdr$

(311) $\delta_{mn} dx^m dx^n = ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\phi^2$

(312) $\delta_{mn} x^m x^n = r^2$

Se sustituye (310), (311) y (312) en (305), para obtener:

(313) $d\sigma^2 = \dfrac{1}{|K|}[dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) + k\dfrac{r^2 dr^2}{1-kr^2}] \Rightarrow$

(314) $d\sigma^2 = \dfrac{1}{|K|}[r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) + \dfrac{dr^2}{1-kr^2}]$

Existen tres posibilidades:

(315A) $k = 0$

(315 B) $k = 1$

(315C) $k = -1$.

El caso de $k = 0$ representa el espacio plano, sin curvatura, euclidiano, con simetría esférica$\Rightarrow$

(316) $d\sigma^2 = \dfrac{1}{|K|}[r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) + dr^2]$

El caso $k = 1$ representa el caso de una curvatura positiva, el universo cerrado, también con simetría esférica, pero no debe confundirse con una pelota cerrada:

(317) $d\sigma^2 = \dfrac{1}{|K|}[r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) + \dfrac{dr^2}{1-r^2}]$

El caso $k = -1$ representa el universo abierto, con curvatura negativa y simetría hiperbólica:

(318) $d\sigma^2 = \dfrac{1}{|K|}[r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) + \dfrac{dr^2}{1+kr^2}]$

A continuación escribiremos **la métrica Friedmann-Robertson-Walker en forma completa**. Si sustituimos (314) en (289), obtenemos esta métrica, en donde $a(t)$ representa la expansión del universo y k la topología o geometría (abierta, cerrada o plana):

(319) $ds^2 = \dfrac{a^2}{|K|}[r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) + \dfrac{dr^2}{1-kr^2}] - c^2 dt^2$

Esto implica que $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ y R dependen de $a(t)$ y k. Volvamos ahora a la ecuación de campo, en donde $\kappa = \dfrac{-8\pi G}{c^4}$, y $T_{\mu\nu}$ representa la materia-energía (al inicio del *Big Bang* se trataba de pura radiación; hoy día es materia-energía).

(320) $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$

Veamos ahora *el lado derecho de esta ecuación*. Recordemos lo dicho sobre el fluido perfecto

(241) $T^{\mu\nu} = \rho u^{\mu} u^{\nu} + \frac{P}{c^2} u^{\mu} u^{\nu} + Pg^{\mu\nu}$ [1748] y

(242) $T^{44} = \rho c^2$ [1749]

Análogamente, por (241) se obtienen $T_{\mu\nu}$ (321) y T^{μ}_{ν} (322):

(321) $T_{\mu\nu} = \rho u_{\mu} u_{\nu} + \frac{P}{c^2} u_{\mu} u_{\nu} + Pg_{\mu\nu}$ [1750]

(322) $T^{\mu}_{\nu} = \rho u^{\mu} u_{\nu} + \frac{P}{c^2} u^{\mu} u_{\nu} + P\delta^{\mu}_{\nu}$

Todo el universo entero es un sistema comóvil. En un sistema comóvil, se obtiene que $\gamma = 1 \Rightarrow$

(323) $u^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

Por lo tanto, $u_i u^j = 0 \Rightarrow$

(324) $T^{i}_{j} = P\delta^{i}_{j}$, de modo que $T^{i}_{i} = P$

De (322) derivamos, tomando en cuenta que $\delta^4_4 = 1$, $u^4 = c$ y $u_4 = -c$:

(325) $T^4_4 = \rho u^4 u_4 + \frac{P}{c^2} u^4 u_4 + P\delta^4_4 = -\rho c^2 - P + P = -\rho c^2$

$\Rightarrow T_{44} = g_{44} T^4_4 = (-1)(-\rho c^2) = \rho c^2$

Las ecuaciones (324) y (325) nos dan la siguiente matriz:

(326) $\Rightarrow T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} P.....0.....0.....0 \\ 0.....P.....0.....0 \\ 0.....0.....P.....0 \\ 0.....0.....0.....-\rho c^2 \end{pmatrix} \Rightarrow T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} P.....0.....0.....0 \\ 0.....P.....0.....0 \\ 0.....0.....P.....0 \\ 0.....0.....0.....\rho c^2 \end{pmatrix}$

Veamos ahora la ley de conservación de energía-momento:

(327) $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$

[1748] Hans Stephani, *General Relativity,* 2nd ed.(1990): 83
[1749] Hans Stephani, *General Relativity,* 2nd ed.(1990): 83, ecuación 8.84
[1750] Hans Stephani, *General Relativity,* 2nd ed.(1990): 83

Por definición:

(328) $T^{\mu}_{4;\mu} = T^{\mu}_{4,\mu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\eta} T^{\eta}_{4} - \Gamma^{\eta}_{4\mu} T^{\mu}_{\eta}$

Veamos primero el primer término del lado derecho:

(329) $T^{\mu}_{4,\mu} = T^{4}_{4;4} = \dfrac{\partial(-\rho c^{2}}{\partial(ct)} = -c\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$

Veamos ahora el segundo término del lado derecho. Vayamos por partes:

(330) $\Gamma^{4}_{44} = 0$ y

(331) $\Gamma^{i}_{4j} = \dfrac{\dot r}{r}\delta^{i}_{j}$

en donde $\dot r = \dfrac{\partial r}{c\partial t} = \dfrac{r'}{c} \Rightarrow \Gamma^{i}_{4j} = \dfrac{1}{c}\dfrac{r'}{r}\delta^{i}_{j}$

De (330) y (331) obtenemos el segundo término del lado derecho de (328):

(332) $\Gamma^{\mu}_{\mu\eta} T^{\eta}_{4} = \Gamma^{\mu}_{\mu 4} T^{4}_{4} = T^{4}_{4}(\Gamma^{i}_{4j} + \Gamma^{4}_{44}) = (-\rho c^{2})\left(\dfrac{1}{c}\dfrac{r'}{r}\delta^{i}_{i}\right) = -3\rho c\dfrac{r'}{r}$

Veamos ahora el tercer término del lado derecho:

(333) $\Gamma^{\eta}_{4\mu} T^{\mu}_{\eta} = \Gamma^{i}_{4j} T^{j}_{i} + \Gamma^{4}_{44} T^{4}_{4} = \Gamma^{i}_{4j} T^{j}_{i} = \dfrac{1}{c}\dfrac{r'}{r}\delta^{i}_{i} P = \dfrac{3P}{c}\dfrac{r'}{r}$

Sustituimos (329), (332) y (333) en (328), para obtener:

(334) $T^{\mu}_{4;\mu} = -c\dfrac{\partial\rho}{\partial t} - 3\rho c\dfrac{r'}{r} - \dfrac{3P}{c}\dfrac{r'}{r} = 0 \Rightarrow$

De (334) obtenemos ***la ecuación de balance de masa-energía:***

(335) $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = -3\dfrac{r'}{r}\left(\rho(t) + \dfrac{P(t)}{c^{2}}\right)$

En este momento de la historia del universo, la densidad y la presión son muy bajas, de modo que podemos reescribir la (335) como:

(336) $\dot\rho = \dfrac{\partial\rho}{\partial t} \cong -3\dfrac{r'}{r}\rho$

De (336) obtenemos:

(337) $\dfrac{\dot\rho}{\rho} \cong -3\dfrac{r'}{r}$

Integramos (337) y obtenemos.

(338) $\ln\rho = -3\ln r = \ln r^{-3} \Rightarrow \rho \propto r^{-3}$

Recordemos (286):

(286) $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$

Hasta ahora hemos visto el lado derecho de la ecuación (320). Veamos ahora el lado izquierdo de la misma ecuación (320):

(339) $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$

Tomando en cuenta que $g_{\mu\nu} g^{\nu\eta} = g_{\mu}^{\eta} = \delta_{\mu}^{\eta}$, de (321) se obtiene:

(340) $g^{\mu\lambda} R_{\mu\nu} = g^{\mu\lambda} (\kappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \Rightarrow \; R_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\lambda} R = \kappa T_{\nu}^{\lambda}$

$$\Rightarrow R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} R = \kappa T_{\nu}^{\mu} \underset{contraer-idices}{\Rightarrow} \quad R_{\mu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\mu} R = \kappa T_{\mu}^{\mu}$$

Dado que $\delta_{\mu}^{\mu} = 4$, se sigue que:

(341) $R = -\kappa T_{\mu}^{\mu}$

Sustituimos (341) en (339), para obtener:

(342) $R_{\mu\nu} = \kappa (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\alpha}^{\alpha}) \underset{subir-índice}{\Rightarrow} \quad R_{\mu}^{\lambda} = \kappa (T_{\mu}^{\lambda} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\lambda} T_{\alpha}^{\alpha})$

$$\Rightarrow \; R_{4}^{4} = \kappa (T_{4}^{4} - \frac{1}{2} \delta_{4}^{4} T_{\alpha}^{\alpha}) \underset{\delta_4^4 = 1}{=} \kappa (T_{4}^{4} - \frac{1}{2} T_{\alpha}^{\alpha})$$

Recordemos (266), (269) y (270):

(322) $T_{\nu}^{\mu} = \rho u^{\mu} u_{\nu} + \frac{P}{c^2} u^{\mu} u_{\nu} + P \delta_{\nu}^{\mu}$

(325) $(u^4 = c \;\&\; u_4 = -c \;\&\; \delta_4^4) \Rightarrow$

$$T_{4}^{4} = \rho u^4 u_4 + \frac{P}{c^2} u^4 u_4 + P \delta_{4}^{4} = -\rho c^2 - P + P = -\rho c^2$$

(326) $T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} P.....0.....0.....0 \\ 0.....P.....0.....0 \\ 0.....0.....P.....0 \\ 0.....0.....0.....-\rho c^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow T_{\alpha}^{\alpha} = 3P - \rho c^2$

Sustituyendo (325) y (326) en (342) obtenemos:

(343) $R_{44} = R_{4}^{4} = \kappa [-\rho c^2 - \frac{1}{2} (3P - \rho c^2)] = -\kappa [\frac{1}{2} \rho c^2 + \frac{3}{2} P]$

Recordemos el tensor de Ricci y el símbolo de Christoffel de la segunda especie[1751]:

$$(75)\ R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} = -\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma,\beta} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\lambda}_{\gamma\eta} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\beta\eta}$$

$$(85)\ \underset{contraer-idices}{\lambda \to \beta} \Rightarrow R^{\beta}_{\alpha\beta\gamma} = -\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma,\beta} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{\gamma\eta} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\beta}_{\beta\eta} \Rightarrow R_{\alpha\gamma} = R^{\beta}_{\alpha\beta\gamma}$$

$$(25B)\ \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\nu} g^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}}\right) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu})$$

Ahora bien, multiplicamos en (75) ambos lados con $g^{\gamma\lambda}$:

$$(344)\ g^{\gamma\lambda} R^{\beta}_{\alpha\beta\gamma} = g^{\gamma\lambda}(-\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma,\beta} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{\gamma\eta} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\beta}_{\beta\eta})$$

En el caso de un universo homogéneo e isotrópico, las derivadas sobre el espacio son cero, dado que en este supuesto x^1, x^2, x^3 son constantes, de modo que solamente queda ∂x^4. Ahora bien, ***el radio del universo se define como*** $r(t)$**,** un factor escalar que solamente depende del tiempo. Usaré la siguiente anotación:

a.- $r(t)$ es el radio del universo; otros autores usan otros símbolos, por ejemplo Allday usa S y Stephani usa K;

b.- La derivada de r es una derivada sobre el tiempo: $\dot{r} = \dfrac{dr}{d(ct)} = \dfrac{1}{c}\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{c}r'$;

c.- La segunda derivada se escribe como $\ddot{r} = \dfrac{d}{d(ct)}\dfrac{dr}{d(ct)} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{d}{dt}\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{c^2}r''$.

d.- Para obtener la métrica de $g^{\mu\nu}$ hay que tener en cuenta que $g^{\mu\nu} = \dfrac{1}{g_{\mu\nu}}$.

La métrica con $r(t)$ adquiere la siguiente matriz (*invertimos los signos de la métrica* $g_{\mu\nu} = \dfrac{1}{g^{\mu\nu}}$ de +1,+1,+1,-1 a -1,-1,-1,+1, *para conformar nuestra métrica a la usada por la mayoría de los libros de texto*; al invertir los signos de la métrica, se siguen otros cambios que se explican en el apartado H de este apéndice, por ejemplo $\kappa = +\dfrac{8\pi G}{c^4}$; $T^4_4 = +\rho c^2$ *y* $T^{\alpha}_{\alpha} = 3P + \rho c^2$; $R^4_4 = -\kappa(\frac{1}{2}\rho c^2 - \frac{3}{2}P)$. Hay que tomar en cuenta que en la siguiente métrica r_e se refiere a las coordenadas esféricas y $r_u(t)$ al radio del universo; a partir de aquí $r_u(t) = r(t)$:

[1751] Hans Stephani, *General Relativity,* 2nd ed. (1990): XIV y 5, ecuación 1.16

$$(345)\ \ g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\dfrac{{r_u}^2(ct)}{1-k{r_e}^2}.....0...........0..............................0 \\ 0.........-{r_e}^2{r_u}^2(ct)....0..............................0 \\ 0................0...........-{r_e}^2sen^2\theta({r_u}^2(ct))....0 \\ 0................0............0...........................+1 \end{pmatrix}$$

Esta es ***la métrica de Friedmann Robertson Walker en coordenadas esféricas con curvatura (el factor*** k***).***

Tomando en cuenta todo esto, y haciendo el álgebra necesaria, obtenemos[1752]

$$(346)\ \ R_4^4 = R_{44} = -\frac{3r}{r} = -\frac{3}{c^2}\frac{r''}{r}$$

Con base en (345) y (346) obtenemos:

$$(347)\ \ R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{11}f(r)........0........0.................................0 \\ ....0......g_{22}f(r).......0.................................0 \\ ....0..........0.........g_{33}f(r)...........................0 \\ ....0..........0............0........g_{44}R_{44} = (+1)(-\dfrac{3r''}{c^2r}) \end{pmatrix}$$

Haciendo el álgebra tensorial necesaria, obtenemos:

$$(348)\ \ f(r) = -\frac{2k}{r^2} - \frac{2}{c^2}\frac{r'^2}{r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{r''}{r}$$

Subiendo un índice en $R_{\mu\nu}$ obtenemos el tensor de Ricci mixto

$$(349)\ \ R_\nu^\mu = g^{\mu\alpha}R_{\alpha\nu}$$

$$(350)\ \ R_\nu^\mu = \begin{pmatrix} g^{11}g_{11}f(r)........0..................0......................0 \\ ....0..............g^{22}g_{22}f(r)........0......................0 \\ ....0.................0................g^{33}g_{33}f(r)...........0 \\ ....0.................0....................0............g^{44}g_{44}R_4^4 \end{pmatrix}$$

De (350) obtenemos:

$$(351)\ \ R = g^{11}g_{11}f(r) + g^{22}g_{22}f(r) + g^{33}g_{33}f(a) + g^{44}g_{44}R_{44}$$

Dado que la delta de Kronecker es:

$$(352)\ \ g^{11}g_{11} = g^{22}g_{22} = g^{33}g_{33} = g^{44}g_{44} = \delta = 1$$

[1752] Hans Stephani, *General Relativity,* 2nd ed.(1996): 266, ecuación 26.4

Se obtiene, combinando (351) y (352):
(353) $R = 3f(r) + R_{44}$

Combinando (348) y (353) obtenemos:
(354) $R = -\frac{6k}{r^2} - \frac{6}{c^2}\frac{r'^2}{r^2} - \frac{3}{c^2}\frac{r''}{r} - \frac{3}{c^2}\frac{r''}{r} = -\frac{6k}{r^2} - \frac{6}{c^2}\frac{r'^2}{r^2} - \frac{6}{c^2}\frac{r''}{r}$

Recordemos (242), (248), (325 y 326), (339) y (346):
(242) $T^{44} = \rho c^2$
(248) $\kappa = +\frac{8\pi G}{c^4}$ (¡signo positivo!)
(325 y 326) (269 y 270) $T_{44} = \rho c^2$
(339) $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}$
(346) $R_{44} = -\frac{3}{c^2}\frac{r''}{r}$

De (339) obtenemos:
(355) $R_{44} - \frac{1}{2}g_{44}R = \kappa T_{44}$

Sustituimos (248), (325 y 326), (346) y (354) en (355) y obtenemos:
(356) $-\frac{3}{c^2}\frac{r''}{r} - \frac{1}{2}(+1)\{-\frac{6k}{r^2} - \frac{6}{c^2}\frac{r'^2}{r^2} - \frac{6}{c^2}\frac{r''}{r}\} = \frac{8\pi G\rho}{c^2} \Rightarrow$

(357) $\frac{3k}{r^2} + \frac{3}{c^2}\frac{r'^2}{r^2} = \frac{8\pi G\rho}{c^2} \Rightarrow$

(358) $\frac{r'^2}{r^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{r^2} \Rightarrow r'^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}r^2 - kc^2$ (nota 1753)

Recordemos (343) y (346) y (248):
(343) $R_{44} = -\kappa[\frac{1}{2}\rho c^2 + \frac{3}{2}P]$
(346) $R_{44} = -\frac{3}{c^2}\frac{r''}{r}$

1753 En Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (1972): 472, encontramos $\dot{R}^2 + k = (8\pi G/3)\rho R^2$, lo que es lo mismo si tomamos en cuenta que Weinberg estandariza las ecuaciones con $c = 1$, de modo que la constante kc^2 en la ecuación (358) es igual a k en Weinberg

(248) $\kappa = -\frac{8\pi G}{c^4}$

Igualando (287) y (290) y tomando en cuenta (192), obtenemos:

(359) $\frac{8\pi G}{c^4}(3P + \rho c^2) = -\frac{6}{c^2}\frac{r''}{r}$

De (359) se obtiene:

(360) $\frac{r''}{r} = -4\pi G\left(\frac{P}{c^2} + \frac{1}{3}\rho\right)$ (nota 1754)

Definimos:

(361) $H = \frac{r'}{r}$

y de (358) y (361) obtenemos:

(362) $H^2 = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{r^2}$

Definimos la densidad crítica y el factor Ω a partir de $k = 0$:

(363) $H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{critica} \Rightarrow \rho_{critica} = \frac{3H^2}{8\pi G}$

(364) $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{critica}}$

y así, de (363) y (364), obtenemos:

(365) $\Omega = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$

De (362) y (365), obtenemos:

(366) $H^2 = \Omega H^2 - \frac{kc^2}{r^2} \Rightarrow \Omega = 1 + \frac{kc^2}{r^2 H^2}$

Se define $\Omega_k = -\frac{kc^2}{H^2 R^2}$ como la curvatura del espacio, que puede ser plano $(k = o)$, abierto ($k = -1 \Rightarrow \Omega_k > 0$); ó cerrado ($k = +1 \Rightarrow \Omega_k < 0$)

Se sigue que,

(367) si $\rho < \rho_{critica} \Rightarrow \Omega < 1 \Rightarrow (k\frac{c^2}{r^2 H^2} < 0 \Rightarrow k = -1$: universo abierto

---

[1754] En Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (1972): 472, encontramos $3\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p)R$, lo que es lo mismo si tomamos en cuenta que Weinberg estandariza las ecuaciones con $c = 1$, de modo que la presión P/c^2 en la ecuación (360) es igual a p en Weinberg

(368) si $\rho = \rho_{critica} \Rightarrow \Omega = 1 \Rightarrow (k\dfrac{c^2}{r^2H^2} = 0 \Rightarrow k = 0$: universo plano

(369) si $\rho > \rho_{critica} \Rightarrow \Omega > 1 \Rightarrow (k\dfrac{c^2}{r^2H^2} > 0 \Rightarrow k = +1$: universo cerrado

Recordemos:

(358) $r'^2 = \dfrac{8\pi G\rho}{3}r^2 - kc^2$

si $k = -1 \Rightarrow$

(370) $r'^2 = \dfrac{8\pi G\rho}{3}r^2 + c^2 \Rightarrow$

si $k = 0 \Rightarrow$

(371) $r'^2 = \dfrac{8\pi G\rho}{3}r^2$

si $k = +1 \Rightarrow$

(372) $r'^2 = \dfrac{8\pi G\rho}{3}r^2 - c^2$

Hoy observamos que $r' > 0$ y de (370) y (371) se deduce que en el caso de $k = -1$ o $k = 0$, $r' \neq 0$ para *todo tiempo*, ó *siempre* $r' < 0$ ó *siempre* $r' > 0$ de modo que para $k = -1$ o $k = 0$, habrá una expansión del Universo para siempre.

Recordemos que:

(338) $\rho \propto r^{-3} \Rightarrow$

(373) $\rho r^2 \propto \dfrac{1}{r}$

Por lo tanto, en el caso de $k = +1$

(374) $\lim\limits_{r \to r_{\max}} = \lim\limits_{r \to r_{\max}} (\dfrac{8\pi G}{3}\rho r^2 - c^2)$

A partir de (360), obtenemos (375):

(375) $r'' = -4\pi G\left(\dfrac{P}{c^2} + \dfrac{1}{3}\rho\right)r$

y de (375) obtenemos:

(376) $\lim\limits_{r \to r_{\max}} r'' = -\dfrac{4}{3}\pi G\left(\dfrac{3P}{c^2} + \rho\right)r_{\max} < 0$ (colapso del universo)

H. ALGUNAS CONSECUENCIAS DEL CAMBIO DE SIGNO EN LA MÉTRICA

A lo largo de este apéndice hemos podido percatarnos cómo el cambio de signo en la métrica, de +,+,+,- a -,-,-,+ ó vice-versa, tiene aparentes consecuencias para el desarrollo de las diferentes ecuaciones, aunque no cambian las ecuaciones fundamentales de la física. Cuando un autor o profesor pasa inadvertidamente de una métrica a otra, se crea confusión y contradicción, tanto en el autor como en el lector. Veamos.

Métrica +, +, +, -	**Métrica -, -, -, +**

Métrica de Minkowski (ecuación 60 del apéndice de la relatividad especial)

$$g_{ab} = \bar{g}_{ab} = \begin{pmatrix} +1.......0........0.......0 \\ ..0.....+1........0.......0 \\ ..0.......0.....+1.......0 \\ ..0.......0........0.....-1 \end{pmatrix}$$

$$g_{ab} = \bar{g}_{ab} = \begin{pmatrix} -1.......0........0.......0 \\ ..0.....-1........0.......0 \\ ..0........0.....-1.......0 \\ ..0........0........0....+1 \end{pmatrix}$$

Métrica del campo gravitacional débil:

$$(272)\ g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+\frac{2\varphi}{c^2}......0..........0...........0 \\ ....0.....1+\frac{2\varphi}{c^2}........0...........0 \\ ....0........0.......1+\frac{2\varphi}{c^2}..........0 \\ .....0........0..........0.....-(1+\frac{2\varphi}{c^2}) \end{pmatrix}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1+\frac{2\varphi}{c^2})......0..........0...........0 \\ ....0.....-(1+\frac{2\varphi}{c^2})........0...........0 \\ ....0........0.......-(1+\frac{2\varphi}{c^2})..........0 \\ .....0........0..........0..........1+\frac{2\varphi}{c^2} \end{pmatrix}$$

Ecuación de Poisson:

(239) $\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$ (Newton) $\qquad$ $\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$ (Newton)

(247) $\nabla^2 g_{44} = \nabla^2(-1-\frac{2\varphi}{c^2}) = \left(-\frac{8\pi G\rho}{c^2}\right)$ $\qquad$ $\nabla^2 g_{44} = \nabla^2(+1+\frac{2\varphi}{c^2}) = \left(\frac{8\pi G\rho}{c^2}\right)$

Se define:

(248) $\kappa = -\frac{8\pi G}{c^4}$ $\qquad$ $\kappa = +\frac{8\pi G}{c^4}$

Más adelante veremos:

(242) $T^{44} = \rho c^2$ $\qquad$ $T^{44} = \rho c^2$

Por el cambio de signo de (247) y (248), cambia el signo de (249):

(249) $\nabla^2 g_{44} = \kappa T_{44} = -\frac{8\pi G\rho}{c^2}$ $\qquad$ $\nabla^2 g_{44} = \kappa T_{44} = +\frac{8\pi G\rho}{c^2}$

Métrica de Friedmann- Robertson-Walker-Lemaître

$$(345)\, g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +\frac{r_u^{\ 2}}{1-kr_e^{\ 2}}....0............0.............0 \\ 0............+r_e^{\ 2}r_u^{\ 2}......0..............0 \\ 0...............0...+r_e^{\ 2}sen^2\theta(r_u^{\ 2})..0 \\ 0...............0............0...........-1 \end{pmatrix} \qquad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{r_u^{\ 2}}{1-kr_e^{\ 2}}....0............0.............0 \\ 0............-r_e^{\ 2}r_u^{\ 2}......0..............0 \\ 0...............0...-r_e^{\ 2}sen^2\theta(r_u^{\ 2})..0 \\ 0...............0............0...........+1 \end{pmatrix}$$

Tensores de energía-momento

$$(246)\, T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} P.....0.....0.....0 \\ 0.....P.....0.....0 \\ 0.....0.....P.....0 \\ 0.....0.....0.....\rho c^2 \end{pmatrix} \qquad T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} P.....0.....0.....0 \\ 0.....P.....0.....0 \\ 0.....0.....P.....0 \\ 0.....0.....0.....\rho c^2 \end{pmatrix}$$

$$(326)\ T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} +P.....0.....0.....0 \\ 0.....+P.....0.....0 \\ 0.....0.....+P.....0 \\ 0.....0.....0.....-\rho c^2 \end{pmatrix} \qquad T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} -P.....0.....0.....0 \\ 0.....-P.....0.....0 \\ 0.....0.....-P.....0 \\ 0.....0.....0.....+\rho c^2 \end{pmatrix}$$

(242) $T^{44} = \rho c^2$ $\qquad$ $T^{44} = \rho c^2$

(325 A) $T_4^4 = g_{44}T^{44} = -1(\rho c^2) = -\rho c^2$ $\qquad$ $T_4^4 = g_{44}T^{44} = +1(\rho c^2) = +\rho c^2$

Por el signo diferente de (325 A), cambia el signo de (325 C):

(325 B) $\Rightarrow T_{44} = g_{44}T_4^4 = -1(-\rho c^2) = \rho c^2$ $\qquad$ $\Rightarrow T_{44} = g_{44}T_4^4 = +1(+\rho c^2) = \rho c^2$

(325 C) $\Rightarrow T_a^a = 3P - \rho c^2$ $\qquad$ $\Rightarrow T_a^a = -3P + \rho c^2$

Tensores de Ricci

$$(347)\, R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{11}f(r) = (+1)f(r).......0.........................0...........................0 \\ ....0.......................g_{22}f(r) = (+1)f(r).....0...........................0 \\ ....0..............................0.............g_{33}f(r) = (+1)f(r)...........0 \\ ....0..............................0.........................0.....g_{44}R_{44} = (-1)\left(+\frac{3r''}{c^2r}\right) \end{pmatrix}$$

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{11}f(r) = (-1)f(r).......0.........................0...0 \\ ....0..................g_{22}f(r) = (-1)f(r)..........0...0 \\ ....0.............................0...........................g_{33}f(r) = (-1)f(r)..............0 \\ ....0.............................0..........................0.......................g_{44}R_{44} = (+1)\left(-\frac{3r''}{c^2r}\right) \end{pmatrix}$$

$$(350)\ R^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} g^{11}g_{11}f(r) = f(r)....0.................0......................0 \\ ....0..........g^{22}g_{22}f(r) = f(r)........0.......................0 \\ ....0.........................0......g^{33}g_{33}f(r) = f(r).........0 \\ ....0.........................0.................0.......g^{44}g_{44}R^{4}_{4} = -\dfrac{3r''}{c^2 r} \end{pmatrix}$$

$$R^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} g^{11}g_{11}f(r) = f(r)....0.........................0........................0 \\ ....0.................g^{22}g_{22}f(r) = f(r)........0........................0 \\ ....0....................0...................g^{33}g_{33}f(r) = f(r)..........0 \\ ....0....................0..............................0..........g^{44}g_{44}R^{4}_{4} = -\dfrac{3r''}{c^2 r} \end{pmatrix}$$

La función relativista del radio del universo (348) no cambia de signo, pero sí cambia la componente temporal del tensor mixto de Ricci (343A), aunque no cambia la componente temporal del tensor covariante de Ricci (343 B):

(348) $f(r) = -\dfrac{2k}{r^2} - \dfrac{2}{c^2}\dfrac{r'^2}{r^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{r''}{r}$ $\qquad$ $f(r) = -\dfrac{2k}{r^2} - \dfrac{2}{c^2}\dfrac{r'^2}{r^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{r''}{r}$

(342) $R^4_4 = \kappa(T^4_4 - \dfrac{1}{2}T^{\alpha}_{\alpha}) \Rightarrow$ $\qquad$ $R^4_4 = \kappa(T^4_4 - \dfrac{1}{2}T^{\alpha}_{\alpha}) \Rightarrow$

(343A) $R^4_4 = -\kappa[\dfrac{1}{2}\rho c^2 + \dfrac{3}{2}P]$ $\qquad$ $R^4_4 = \kappa[\dfrac{1}{2}\rho c^2 + \dfrac{3}{2}P]$

(343 $\qquad$ B)$\Rightarrow R_{44} = g_{44}R^4_4 = -1(R^4_4) = \kappa(\dfrac{1}{2}\rho c^2 + \dfrac{3}{2}P)$

$\Rightarrow R_{44} = g_{44}R^4_4 = +1(R^4_4) = \kappa(\dfrac{1}{2}\rho c^2 + \dfrac{3}{2}P)$

(346) $R_{44} = g_{44}R^4_4 = (-1)(-\dfrac{3}{c^2}\dfrac{r''}{r}) = +\dfrac{3}{c^2}\dfrac{r''}{r}$ $\qquad$ $R_{44} = g_{44}R^4_4 = (+1)(-\dfrac{3}{c^2}\dfrac{r''}{r}) = -\dfrac{3}{c^2}\dfrac{r''}{r}$

No cambia la función del escalar de curvatura (353 y 354):

(353) $R = 3f(r) + R^4_4$ $\qquad$ $R = 3f(r) + R^4_4$

(354) $R = -\dfrac{6k}{r^2} - \dfrac{6}{c^2}\dfrac{r'^2}{r^2} - \dfrac{6}{c^2}\dfrac{r''}{r}$ $\qquad$ $R = -\dfrac{6k}{r^2} - \dfrac{6}{c^2}\dfrac{r'^2}{r^2} - \dfrac{6}{c^2}\dfrac{r''}{r}$

Tanto el lado izquierdo, como el derecho de la ecuación de Einstein cambian de signo (356, 357 y 359), lo que resulta en un cambio neto nulo de signo en toda las ecuaciones (339) a (362):

(339) $R_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}$ $\qquad$ $R_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}$

(355) $R_{44} - \dfrac{1}{2}g_{44}R = \kappa T_{44}$ $\qquad$ $R_{44} - \dfrac{1}{2}g_{44}R = \kappa T_{44}$

$$(356)\ +\frac{3}{c^2}\frac{r''}{r}-\frac{1}{2}(-1)\{-\frac{6k}{r^2}-\frac{6}{c^2}\frac{r'^2}{r^2}-\frac{6}{c^2}\frac{r''}{r}\}=-\frac{8\pi G\rho}{c^2}$$

$$-\frac{3}{c^2}\frac{r''}{r}-\frac{1}{2}(+1)\{-\frac{6k}{r^2}-\frac{6}{c^2}\frac{r'^2}{r^2}-\frac{6}{c^2}\frac{r''}{r}\}=\frac{8\pi G\rho}{c^2}$$

$$(357)-\frac{3k}{r^2}-\frac{3}{c^2}\frac{r'^2}{r^2}=-\frac{8\pi G\rho}{c^2} \qquad \frac{3k}{r^2}+\frac{3}{c^2}\frac{r'^2}{r^2}=+\frac{8\pi G\rho}{c^2}$$

$$(358)\frac{r'^2}{r^2}=\frac{8\pi G\rho}{3}-\frac{kc^2}{r^2}\Rightarrow r'^2=\frac{8\pi G\rho}{3}r^2-kc^2 \qquad \frac{r'^2}{r^2}=\frac{8\pi G\rho}{3}-\frac{kc^2}{r^2}\Rightarrow r'^2=\frac{8\pi G\rho}{3}r^2-kc^2$$

$$(359)\ -\frac{8\pi G}{c^4}(3P+\rho c^2)=+\frac{6}{c^2}\frac{r''}{r} \qquad \frac{8\pi G}{c^4}(3P+\rho c^2)=-\frac{6}{c^2}\frac{r''}{r}$$

$$(360)\ \frac{r''}{r}=-4\pi G\left(\frac{P}{c^2}+\frac{1}{3}\rho\right) \qquad \frac{r''}{r}=-4\pi G\left(\frac{P}{c^2}+\frac{1}{3}\rho\right)$$

$$(361)\ H=\frac{r'}{r} \qquad H=\frac{r'}{r}$$

$$(362)\ H^2=\left(\frac{r'}{r}\right)^2=\frac{8\pi G}{3}\rho-\frac{kc^2}{r^2} \qquad H^2=\left(\frac{r'}{r}\right)^2=\frac{8\pi G}{3}\rho-\frac{kc^2}{r^2}$$

De la tabla anterior se desprende que los términos asociados a las métricas, pueden cambiar de signo, pero ***las cantidades que tienen significado físico son invariantes con respecto a la signatura de la métrica,*** por ejemplo la fuente del campo gravitacional (239), la función del radio del universo (348), la función de la curvatura del espacio (353 y 354), la ecuación de Einstein (339), las componentes de la ecuación de Einstein (355 y 356), y la constante de Hubble (358, 361, 362).

I. LA SOLUCION DE SCHWARZSCHILD A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

Con respecto a la definición del tiempo propio, $d\tau = {ds}/{c}$, hemos de tomar en cuenta que solamente es correcta en el espacio de Minkowski, donde los objetos se mueven sin aceleración causada por algún campo gravitacional. La definición $d\tau = {ds}/{c}$ es un caso muy particular, porque generalmente los objetos se mueven acelerados o frenados por campos gravitacionales, lo que nos lleva a la teoría de la relatividad general.

Recordemos que en el espacio de Minkowski el tensor métrico es simple:

$$(377)\quad g_{ab}=\bar{g}_{ab}=\begin{pmatrix}1.......0........0.......0\\0.......1........0.......0\\0.......0........1.......0\\0.......0........0....-1\end{pmatrix}$$

Por eso pudimos obtener la definición simple de ds en el espacio de Minkowski:

$$(378)\quad (ds)^2=g_{11}(dx^1)^2+g_{22}(dx^2)^2+g_{33}(dx^3)^2+g_{44}(dx^4)^2\ \Rightarrow$$

(379) $(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2$ y $dx^4 = cdt$

El tiempo propio se define como el tiempo de un objeto que no se mueve con respecto al observador, es decir, el tiempo en el reloj del propio observador. Aunque este tiempo propio no se distorsiona por la transformación de Lorentz (debido a altas velocidades), en un campo gravitacional fuerte, este tiempo propio sí se distorsiona por la fuerza gravitacional o aceleración propia. Por lo tanto, la definición completa del tiempo propio $d\tau$ incluye la atracción gravitacional de un cuerpo esférico con masa M ejercida según la constante gravitacional G sobre un objeto en un punto P, fuera del cuerpo, a una distancia r.

Dado que en el 'tiempo propio' es como si estuviéramos montados sobre la partícula que viaja, se elimina la distorsión por la alta velocidad de la partícula. En el caso contrario, la ecuación de la métrica incluye la distorsión por altas velocidades. En la siguiente ecuación de Reissner-Nordström (324)[1755], la parte en corchetes [...] representa la carga eléctrica del objeto. En ***la ecuación de Reissner-Nordström,*** a diferencia de la de Kerr (1963), se hace el supuesto de que el momento angular ($L = 0 \Rightarrow a = (L/M) = 0$):

(380) $$ds^2 = [\frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\kappa e^2}{2r^2}} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)] - (1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\kappa e^2}{2r^2})c^2 dt^2$$

Para pasar de la ecuación de Reissner-Nordström a la de Schwarzschild, hacemos el supuesto adicional de que la carga eléctrica del objeto es cero ($e = 0$ ***)***, lo que simplifica la ecuación:

(381) $$ds^2 = (\frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}})dr^2 + (r^2)d\theta^2 + (r^2 sen^2\theta)\, d\phi^2 - (1 - \frac{2GM}{c^2 r})c^2 dt^2$$ ([1756])

Los cuatro términos entre paréntesis constituyen los coeficientes métricos, que juntos determinan el tensor métrico de Schwarzschild en un espacio tridimensional, en donde la masa M no es pequeña:

(382) $$g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sen^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \end{pmatrix}$$

[1755] Hans Stephani, *General Relativity,* 2nd ed. (1996): 126, ecuación 12.1 (Stephani toma G=c=1)

[1756] Es la misma ecuación que encontramos en Hans Stephani, Dietrrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers & Eduard Herat, *Exact Solutions of Einstein´s Field Equations* (2006): 233, eq. 15.21, pero estos autores toman estandarizan con $c = 1$ y $G = 1$ y yo no, y yo tomo la carga eléctrica del Sol cero, $e = 1$ y ellos no, $e \neq 0$

La ecuación y el tensor de Schwarzschild se simplifican todavía más, si se trata de *un espacio bidimensional, es decir, un plano, como, por ejemplo, los planos de las órbitas de los planetas que giran alrededor del Sol*. En este caso, dado que $\theta = 0.5\pi = 90^0$, se sigue que $sen\theta = 1$, y $d\theta = 0$:

(383) $$ds^2 = (\frac{1}{1-\frac{2GM}{c^2 r}})dr^2 + (r^2)\,d\phi^2 - (1-\frac{2GM}{c^2 r})c^2 dt^2$$

(384) $$g_{mn} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\frac{2GM}{c^2 r}} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right) \end{pmatrix}$$

Cuando se trata del tiempo propio, a saber, la conducta del reloj del propio observador, de modo que $dt = d\tau$ ***y el observador se encuentra en un campo gravitacional fuerte (*** $M \neq 0$ ***):***

(385) $$ds^2 = -(1-\frac{2GM}{c^2 r})c^2 d\tau^2 \Rightarrow d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2}\frac{1}{(-1+\frac{2GM}{c^2 r})}$$

De (381) se obtiene la ecuación de Schwarzschild, del tiempo propio:

(386 A) $$d\tau = \frac{ds}{c}\frac{1}{\sqrt{(-1+\frac{2GM}{c^2 r})}}$$

Dado que algunos usan la métrica -, -, -, +, la ecuación cambia con la métrica +, +, +, -

(386 B) $$d\tau = \frac{ds}{c}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)}}$$

El objeto $\frac{2GM}{c^2 r}$ ***es un escalar variable sin dimensiones***, porque las diferentes unidades se cancelan, como se demuestra en la (387):

(387) $$\frac{Nm^2}{kg^2}kg\frac{s^2}{m^2}\frac{1}{m} = \frac{m^3}{kgs^2}kg\frac{s^2}{m^3} = 1$$

Obviamente, solamente si $M=0$, $d\tau = \frac{ds}{c}$, pero si el objeto se encuentra en el campo gravitacional del cuerpo con masa $M \neq 0$, las cosas cambian radicalmente, y el valor numérico de $d\tau$ deja de ser invariante, aunque la estructura de la ley (387) sigue siendo invariante. En factor $d\tau$ es mayor en la medida que $M >> 0$ y $r >> 0$. Veamos los siguientes tres casos:

(388) $\frac{2GM}{c^2 r} > 1 \Rightarrow d\tau = \frac{ds}{c}\frac{1}{\sqrt{escalarnegativo}}$ $\Rightarrow$ el tiempo propio virtual dentro de un hoyo negro;

(389) $\frac{2GM}{c^2 r} = 1 \Rightarrow d\tau = \frac{ds}{c}\frac{1}{\infty} \cong 0 \Rightarrow$ en el horizonte de eventos del hoyo negro, el tiempo propio se para;

(390) $\frac{2GM}{c^2 r} < 1 \Rightarrow d\tau = \frac{ds}{c}\frac{1}{\sqrt{escalarpositivo}}$ $\Rightarrow$ la dilatación del tiempo propio en campos gravitacionales 'normales'.

K. EL MODELO LEMAÎTRE CON $k = +1$ Y CONSTANTE COSMOLÓGICA $\Lambda > 0$

Recordemos algunas ecuaciones:

(286) $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

(360) $\frac{\ddot{R}}{R} = -4\pi G\left(\frac{P}{c^2} + \frac{1}{3}\rho\right)$

(358) $\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} R^2 - kc^2$

De (360) y (358) obtenemos, respectivamente:

(391) $\overset{c=1}{\Rightarrow}\ \ddot{R} = -4\pi G\left(\frac{\rho}{3} + p\right) R$

(392) $\overset{c=1}{\Rightarrow}\ \dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2$

De (391) y (392) se deduce que:

(393) $R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k = -4\pi G(\rho/3 + p)R^2 + \frac{16\pi G\rho}{3} R^2 = 4\pi G\rho R^2 - 4\pi G p R^2 = 4\pi G(\rho - p)R^2$

Ahora introducimos la constante cosmológica. Einstein la introdujo, para mantener estable su modelo estático del universo. La (286) se transforma en la (394):[1757]

[1757] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (1972): 613-616

$$(394)\, R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \overset{c=1}{\Rightarrow}$$

$$(395)\, R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G \overline{T}_{\mu\nu}$$, en donde:

$$(396)\, \overline{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}$$

Análogamente:[1758]

$$(397)\, \overline{\rho} = \rho + \frac{\lambda}{8\pi G} \quad \text{y} \quad \overline{p} = p - \frac{\lambda}{8\pi G}$$

Reescribimos (392) con la constante cosmológica en la ecuación (397):

$$(398)\, \dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \overline{\rho} R^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho + \frac{\lambda}{8\pi G}\right) R^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \frac{\lambda R^2}{3}$$

Definimos el término α:

$$(399)\, \alpha = (\rho R^3) * (4\pi G \sqrt{|\lambda|}$$

Combinando (398) y (399), y tomando en cuenta que en el modelo de Lemaître: $k = +1$ y $\lambda > 0$ y $\alpha > 1$:

$$(400)\, \dot{R}^2 = \frac{1}{R}\left\{\frac{\lambda R^3}{3} - kR + \frac{2\alpha}{3\sqrt{|\lambda|}}\right\} \overset{k=1,\lambda>0}{\Rightarrow}$$

$$(401)\quad \dot{R}^2 = \frac{1}{R}\left\{\frac{\lambda R^3}{3} - R + \frac{2\alpha}{3\sqrt{\lambda}}\right\}$$

Según Weinberg,[1759] *la expansión tiene su tasa mínima* cuando:

$$(402)\, R = \alpha^{1/3} / \sqrt{\lambda}$$

y sigue por un período estacionario más o menos largo en su valor mínimo. Luego vuelve a acelerarse, hasta que termine de acercarse al resultado de De Sitter:[1760]

$$(403)\; R \propto e^{H*t} \quad \text{y}$$

$$(404)\, H = \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{1/2}.$$

Cuando está *en su período estacionario*, por la (397), la (396 B) se transforma en:[1761]

[1758] Ecuaciones 16.2.5 en Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (1972): 614
[1759] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (1972): 615
[1760] Ecuaciones 16.2.13 y 16.2.14 en Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (1972): 615
[1761] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (1972): 615

(405) $$\dot{R}^2 = \left\{ \frac{\lambda(\alpha^{2/3}/\lambda)}{3} - 1 + \frac{2\alpha}{(3\alpha^{1/3}/\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda}} \right\} = \left\{ \frac{\alpha^{2/3}}{3} - 1 + \frac{2\alpha^{2/3}}{3} \right\} = \alpha^{2/3} - 1$$ ([nota 1762])

[1762] Es decir, $\dot{R}^2 = \alpha^{2/3} - 1 + (\sqrt{\lambda}R - \alpha^{1/3})^2$. El tercer término, por la (397) es cero.

APÉNDICE VI C. LA ROTACIÓN DEL PERIHELIO DE MERCURIO
por Juan Auping con la asesoría de Alfredo Sandoval

En este apéndice primero derivaremos, a partir de la geodésica de Einstein y la métrica de Schwarzschild, la ecuación exacta de la rotación del perihelio de cualquier planeta que tiene una órbita elíptica alrededor del Sol (VI C 1); luego obtendremos, con base en los datos empíricos astronómicos actuales (VI C 2) y los instrumentos matemáticos hoy disponibles,[1763] la solución *exacta* del perihelio de Mercurio y compararé este resultado con los hechos (VI C 3); luego comprobaremos que Einstein ofreció, como señala también Ohanian, una "*solución aproximada,*"[1764] pero no solamente esto, sino que, además, *ajustó sus ecuaciones dos veces, sin base en la física o las matemáticas del caso, para obtener el resultado empírico deseado* (VI C 4).[1765] En consecuencia, concluiremos que *su solución es compatible con la teoría general de la relatividad, pero no la corrobora*.

VI C 1. La rotación del perihelio de planetas del sistema solar derivada de la geodésica y la métrica de Schwarzschild

Lo que Einstein y los autores modernos[1766] tienen en común es que parten de la geodésica.[1767] Sin embargo, en 1915, Einstein todavía no conocía la métrica de Schwarzschild, que éste, estando en la frente rusa de a Primera Guerra Mundial, derivó directamente de la teoría general y proporcionó a Einstein en 1917. Éste le agradeció su solución en términos cálidos: "*Nunca se me ocurrió que un tratamiento riguroso del problema sería tan simple.*"[1768] Lamentablemente, Einstein no aprovechó la métrica de Schwarzschild para corregir las aproximaciones y "*errores*"[1769] de su ensayo de noviembre de 1915. A partir de las ecuaciones de las geodésicas y la métrica de Schwarzschild, obtenemos *la rotación del perihelio de cualquier planeta que gira alrededor del Sol*. Según los datos empíricos de las variables de cada planeta (semieje mayor, excentricidad, distancia mínima y máxima del Sol, y masa), se obtiene la rotación del perihelio de cada planeta en particular, por ejemplo de Mercurio

La ecuación de las geodésicas es:[1770]

$$(1)\quad \frac{d^2x^\eta}{ds^2} + \Gamma^\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

Derivando sobre el tiempo propio del planeta en órbita será:

[1763] Programa *Mathematica* de Wolfram
[1764] Hans Ohanian, *Einstein´s mistakes* (2008): 245
[1765] Albert Einstein, "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity," en: *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte* (1915), traducido al inglés en: *The Collected Works of Albert Einstein,* vol. 6 (1989): 112-116
[1766] Véanse Hans Ohanian, *Gravitation and Spacetime* (1972): 280-292; Charles Misner & otros, *Gravitation* (1973): 1110-1116; Ronald Adler & otros, *Introduction to General Relativity* (1975): 199-209; Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (1972): 1194-201
[1767] Ecuación 170 del Apéndice VI B
[1768] Citado en Hans Ohanian, *Einstein´s mistakes* (2008): 246
[1769] Hans Ohanian, *Einstein´s mistakes* (2008): 215 señala que hay errores pero no dice cuáles. Los señalaré a continuación en el texto de este apéndice.
[1770] Ecuación 170 del Apéndice VI B

$$(2)\ \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$$

en donde:

$$(3)\ d\tau=\frac{ds}{c\sqrt{1-\frac{2GM}{c^2r}}}=\frac{cdt}{c\sqrt{(1-\alpha u)}}=\frac{dt}{\sqrt{(1-\alpha u)}}\cong dt\ (^{\text{nota }1771})$$

Si bien es cierto que la masa del Sol es considerable, en el caso de Mercurio, el factor $\frac{2GM}{c^2r}\cong 5.1*10^{-8}$ es tan pequeño, que $\sqrt{1-5.1*10^{-8}}=0.999999974\cong 1$. Está justificado, entonces, usar la aproximación $d\tau\cong ds/c$. Dado que, por definición, $ds=cdt$, se sigue que, en el caso del tiempo propio de Mercurio, $d\tau\cong dt$.

La ecuación de Schwarzschild es:[1772]

$$(4)\ ds^2=\left(\frac{1}{1-\frac{2GM}{c^2r}}\right)dr^2+(r^2)d\theta^2+(r^2sen^2\theta)\,d\phi^2-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2$$

en donde los términos entre paréntesis representan el tensor métrico de Schwarzschild.[1773] A continuación reproduzco este tensor, en donde $\alpha=\frac{2GM}{c^2}=2{,}949.466\,m$:

$$(5)\ g_{\mu\nu}\equiv\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\alpha/r} & 0 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & r^2sen^2\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & -(1-\alpha/r)\end{pmatrix}$$

Ahora bien, dado que tenemos en la geodésica 4 componentes (3 espaciales y una temporal), el índice μ de la ecuación (2) varía de 1 a 4, y que $x^1=r$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$ y $x^4=ct$. Por lo tanto, la geodésica de la ecuación (2) contiene las siguientes cuatro ecuaciones:

$$(6)\ \frac{d^2r}{d\tau^2}+\Gamma^1_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$$

$$(7)\ \frac{d^2\theta}{d\tau^2}+\Gamma^2_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$$

$$(8)\ \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\Gamma^3_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$$

[1771] Ecuación 386 B del Apéndice VI B; $\alpha=(2GM)/c^2$ y $u=1/r$

[1772] Ecuación 381 del Apéndice VI B

[1773] Ecuación 382 del Apéndice VI B

(9) $\frac{cd^2t}{d\tau^2}+\Gamma^4_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$

Para resolver estas cuatro ecuaciones, hemos de tomar en cuenta los siguientes puntos:

1) En el caso del tensor de Schwarzschild, por ser esférico el sistema de coordenadas: $x^1=r$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$ y $x^4=ct$;
2) por la métrica esférica, en todos los casos en donde $\mu\neq\nu$ se sigue que $g_{\mu\nu}=0$;
3) g_{11} a g_{44} dependen de r (y g_{33} además de θ), de modo que los derivados de g_{11} a g_{44} sobre el tiempo t y el ángulo φ son cero: $\partial g_{nn}/\partial x^4=0$ y $\partial g_{nn}/\partial x^3=0$;
4) $g_{\alpha\beta}*g^{\alpha\sigma}=\delta^\sigma_\beta\Rightarrow g_{nn}*g^{nn}=\delta^n_n\Rightarrow g^{nn}=\delta^n_n/g_{nn}=1/g_{nn}$: $nn=11$ *ó* 22 *ó* 33 *ó* 44;
5) cuando la esfera colapsa en un plano, como en el caso de la órbita de un planeta alrededor del Sol, se sigue que $\theta=90^0\Rightarrow dx^2=d\theta=0$ y $sen\theta=sen^2\theta=1$;
6) el índice β varía de 1 a 4, pero, por el punto 5, $dx^2/d\tau=d\theta/d\tau=0$;
7) un símbolo de Christoffel se define como:[1774]

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right)$$

La componente número 4 ($\mu=4$)

(9) $\frac{cd^2t}{d\tau^2}+\Gamma^4_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$

El índice α varía de 1 a 4:

(10) $\frac{cd^2t}{d\tau^2}+\Gamma^4_{1\beta}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}+\Gamma^4_{2\beta}\frac{dx^2}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}+\Gamma^4_{3\beta}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}+\Gamma^4_{4\beta}\frac{dx^4}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$

Dado que $dx^2=d\theta=0$ (punto 5), el tercer término de la (10) es cero, de modo que quedan de la (10) solamente cuatro términos:

(11) $\frac{cd^2t}{d\tau^2}+\Gamma^4_{1\beta}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}+\Gamma^4_{3\beta}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}+\Gamma^4_{4\beta}\frac{dx^4}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$

En cada uno de los tres términos del lado derecho, descartamos $\beta=2$, porque $dx^2=d\theta=0$ (punto 5). La (11) se transforma, entonces en:

(12) $\frac{cd^2t}{d\tau^2}+\Gamma^4_{11}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau}+\Gamma^4_{13}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau}+\Gamma^4_{14}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^4}{d\tau}+\Gamma^4_{31}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau}+\Gamma^4_{33}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau}$
$+\Gamma^4_{34}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^4}{d\tau}+\Gamma^4_{41}\frac{dx^4}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau}+\Gamma^4_{43}\frac{dx^4}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau}+\Gamma^4_{44}\frac{dx^4}{d\tau}\frac{dx^4}{d\tau}=0$

Si sumamos los términos de la (12), obtenemos:

[1774] Ecuación 25 B del Apéndice VI B

$$(13)\ \frac{cd^2t}{d\tau^2}+\Gamma^4_{11}(\frac{dx^1}{d\tau})^2+2\Gamma^4_{13}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau}++2\Gamma^4_{14}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^4}{d\tau}+\Gamma^4_{33}(\frac{dx^3}{d\tau})^2+2\Gamma^4_{34}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^4}{d\tau}+$$
$$+\Gamma^4_{44}(\frac{dx^4}{d\tau})^2=0$$

Podemos desarrollar cada uno de los símbolos de Christoffel de la ecuación (13) en términos del tensor métrico. Para la componente $\mu=4$, será como sigue (por el punto 7):

$$(14)\ \Gamma^4_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{4\nu}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right)\Rightarrow$$

$$(15)\ \Gamma^4_{11}=\frac{1}{2}g^{44}\left(\frac{\partial g_{14}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{14}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4}\right)=0$$

$$(16)\ \Gamma^4_{13}=\frac{1}{2}g^{44}\left(\frac{\partial g_{14}}{\partial x^3}+\frac{\partial g_{34}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{13}}{\partial x^4}\right)=0$$

$$(17)\ \Gamma^4_{14}=\frac{1}{2}g^{44}\left(\frac{\partial g_{14}}{\partial x^4}+\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{14}}{\partial x^4}\right)=\frac{1}{2}g^{44}\left(\frac{\partial g_{44}}{\partial r}\right)$$

$$(18)\ \Gamma^4_{33}=\frac{1}{2}g^{44}\left(\frac{\partial g_{34}}{\partial x^3}+\frac{\partial g_{34}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}\right)=0$$

$$(19)\ \Gamma^4_{34}=\frac{1}{2}g^{44}\left(\frac{\partial g_{34}}{\partial x^4}+\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{34}}{\partial x^4}\right)=0$$

$$(20)\ \Gamma^4_{44}=\frac{1}{2}g^{44}\left(\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4}+\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4}-\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4}\right)=0$$

y combinando la (9) y la (15) a la (20), obtenemos la ecuación de la cuarta componente:[1775]

$$(21)\ \frac{cd^2t}{d\tau^2}+2c\Gamma^4_{14}\frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau}=0\Rightarrow\frac{d^2t}{d\tau^2}+2\Gamma^4_{14}\frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau}=0\Rightarrow\frac{d^2t}{d\tau^2}+g^{44}\left(\frac{\partial g_{44}}{\partial r}\right)\frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau}=0$$

Dado que $g_{44}=-(1-\alpha/r)$ y $g^{44}=1/g_{44}$, se sigue que $g^{44}=-1/(1-\alpha/r)$ y $\partial g_{44}/\partial r=-\alpha/r^2$, de modo que la (21) se transforma en:

$$(22)\ \frac{d^2t}{d\tau^2}+\frac{\alpha}{r(r-\alpha)}\frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau}=0$$

La componente número 3 ($\mu=3$)

$$(8)\ \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\Gamma^3_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$$

[1775] Coincide con Hans Ohanian, *Gravitation and Spacetime* (....): 287, ecuación [34] $\ddot{t}+N'\dot{r}\dot{t}=0$ e ibidem: 283, ecuación [8] $\Gamma^0{}_{01}=\Gamma^0{}_{10}=\frac{1}{2}N'$, tomando en cuenta que $\Gamma^0{}_{01}=\Gamma^4{}_{14}$.

$$(23)\quad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\Gamma^3_{1\beta}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}+\ \Gamma^3_{2\beta}\frac{dx^2}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\ +\Gamma^3_{3\beta}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\ +\Gamma^3_{4\beta}\frac{dx^4}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$$

El tercer término es cero, porque $dx^2=d\theta=0$, de modo que quedan de la ecuación (23) solamente cuatro términos:

$$(24)\quad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\Gamma^3_{1\beta}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}+\ \Gamma^3_{3\beta}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\ +\Gamma^3_{4\beta}\frac{dx^4}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$$

En cada uno de los tres términos del lado derecho, el índice β varía de 1 a 4, pero descartamos $\beta=2$, porque $dx^2=d\theta=0$. La (24) tiene, entonces, 10 términos;

$$(25)\quad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\Gamma^3_{11}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau}+\Gamma^3_{13}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau}+\ \Gamma^3_{14}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^4}{d\tau}+\Gamma^3_{31}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau}+\ \Gamma^3_{33}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau}$$
$$+\Gamma^3_{34}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^4}{d\tau}+\Gamma^3_{41}\frac{dx^4}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau}\ +\Gamma^3_{43}\frac{dx^4}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau}\ +\Gamma^3_{44}\frac{dx^4}{d\tau}\frac{dx^4}{d\tau}=0$$

Si sumamos los términos iguales de la (25), obtenemos.

$$(26)\quad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\ \Gamma^3_{11}(\frac{dx^1}{d\tau})^2+2\Gamma^3_{13}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau}++2\Gamma^3_{14}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^4}{d\tau}+\ \Gamma^3_{33}(\frac{dx^3}{d\tau})^2+2\Gamma^3_{34}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^4}{d\tau}+$$
$$+\Gamma^3_{44}(\frac{dx^4}{d\tau})^2=0$$

En el caso de $\mu=3$, por el punto 7, el símbolo de Cristoffel será:

$$(27)\quad \Gamma^3_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{3\nu}\left(\frac{\partial g_{\alpha 3}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial g_{\beta 3}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^3}\right)\Rightarrow$$

$$(28)\quad \Gamma^3_{11}=\frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}\right)=0$$

$$(29)\quad \Gamma^3_{13}=\frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3}+\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3}\right)=\frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial r}\right)$$

$$(30)\quad \Gamma^3_{14}=\frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^4}+\frac{\partial g_{43}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{14}}{\partial x^3}\right)=0$$

$$(31)\quad \Gamma^3_{33}=\frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}+\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}\right)=0$$

$$(32)\quad \Gamma^3_{34}=\frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^4}+\frac{\partial g_{43}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{34}}{\partial x^3}\right)=0$$

$$(33)\quad \Gamma^3_{44}=\frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{43}}{\partial x^4}+\frac{\partial g_{43}}{\partial x^4}-\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3}\right)=0$$

Combinando (27) a (33), obtenemos:

$$(34)\quad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2\Gamma^3_{13}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + g^{33}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial r}\right)\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = 0$$

Por los puntos 4 y 5, $g^{33} = 1/g_{33} = 1/sen^2\theta\, r^2 = 1/r^2$. Por eso la (34) se transforma en:[1776]

$$(35)\quad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r^2}{\partial r}\right)\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = 0$$

La componente número 2 ($\mu = 2$)

$$(7)\quad \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \Gamma^2_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

Variando α de 1 a 4, obtenemos:

$$(36\,)\quad \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \Gamma^2_{1\beta}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^2_{2\beta}\frac{dx^2}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^2_{3\beta}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^2_{4\beta}\frac{dx^4}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

El primer y tercer término contienen la derivada del ángulo $\theta = 90^0$, que es cero, ($dx^2 = d\theta = d^2\theta = 0$), de modo que quedan de la ecuación (36) solamente tres términos:

$$(37)\quad \Gamma^2_{1\beta}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^2_{3\beta}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^2_{4\beta}\frac{dx^4}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

En cada uno de estos tres términos, el índice β varía de 1 a 4, pero descartamos $\beta = 2$, porque $dx^2 = d\theta = 0$. La (37) se transforma, entonces, en:

$$(38)\quad \Gamma^2_{11}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma^2_{13}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau} + \Gamma^2_{14}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^4}{d\tau} + \Gamma^2_{31}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma^2_{33}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau}$$
$$+ \Gamma^2_{34}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^4}{d\tau} + \Gamma^2_{41}\frac{dx^4}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma^2_{43}\frac{dx^4}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau} + \Gamma^2_{44}\frac{dx^4}{d\tau}\frac{dx^4}{d\tau} = 0$$

Si sumamos los términos de la (33), obtenemos:

$$(39)\,\Gamma^2_{11}\left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)^2 + 2\Gamma^2_{13}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau} + + 2\Gamma^2_{14}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^4}{d\tau} + \Gamma^2_{33}\left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^2 + 2\Gamma^2_{34}\frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^4}{d\tau} +$$
$$+ \Gamma^2_{44}\left(\frac{dx^4}{d\tau}\right)^2 = 0$$

Por el punto 7, en el caso $\mu = 2$, el símbolo de Christoffel adquiere la siguiente forma:

$$(40)\quad \Gamma^2_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{\alpha 2}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta 2}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^2}\right) \Rightarrow$$

[1776] Tomando en cuenta que en el plano $2\cot\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} = 2 * 0 * \partial\varphi / \partial\tau * 0 = 0$, esta ecuación coincide con Hans Ohanian, *Gravitation and Spacetime* (1972): 287, ecuación [33]: $\ddot{\varphi} + (2/r)\dot{r}\dot{\varphi} + 2\cot\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} = 0$

(41) $\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) = 0$

(42) $\Gamma^2_{13} = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} \right) = 0$

(43) $\Gamma^2_{14} = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^4} + \frac{\partial g_{42}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{14}}{\partial x^2} \right) = 0$

(44) $\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) = 0$

(45) $\Gamma^2_{34} = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^4} + \frac{\partial g_{42}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{34}}{\partial x^2} \right) = 0$

(46) $\Gamma^2_{44} = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{42}}{\partial x^4} + \frac{\partial g_{42}}{\partial x^4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x^2} \right) = 0$

Por la (41) a la (46), la (7) se reduce a $0 = 0$ y no cuenta.

La componente número 1 ($\mu = 1$)

(6) $\frac{d^2 r}{d\tau} + \Gamma^1_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$

El índice α varía de 1 a 4:

(47) $\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \Gamma^1_{1\beta} \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^1_{2\beta} \frac{dx^2}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^1_{3\beta} \frac{dx^3}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^1_{4\beta} \frac{dx^4}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$

El tercer término es cero, de modo que quedan de la (47) se simplifica como la (48):

(48) $\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \Gamma^1_{1\beta} \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^1_{3\beta} \frac{dx^3}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^1_{4\beta} \frac{dx^4}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$

El índice β varía de 1 a 4, pero descartamos $\beta = 2$, porque $dx^2 = d\theta = 0$:

(49) $\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \Gamma^1_{11} \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma^1_{13} \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^3}{d\tau} + \Gamma^1_{14} \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^4}{d\tau} + + \Gamma^1_{31} \frac{dx^3}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma^1_{33} \frac{dx^3}{d\tau} \frac{dx^3}{d\tau} +$
$+ \Gamma^1_{34} \frac{dx^3}{d\tau} \frac{dx^4}{d\tau} + \Gamma^3_{41} \frac{dx^4}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau} + \Gamma^3_{43} \frac{dx^4}{d\tau} \frac{dx^3}{d\tau} + \Gamma^3_{44} \frac{dx^4}{d\tau} \frac{dx^4}{d\tau} = 0$

Si sumamos los términos de la (49), obtenemos:

(50) $\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \Gamma^1_{11} (\frac{dx^1}{d\tau})^2 + 2\Gamma^1_{13} \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^3}{d\tau} + + 2\Gamma^1_{14} \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^4}{d\tau} + \Gamma^1_{33} (\frac{dx^3}{d\tau})^2 + 2\Gamma^1_{34} \frac{dx^3}{d\tau} \frac{dx^4}{d\tau} +$
$+ \Gamma^1_{44} (\frac{dx^4}{d\tau})^2 = 0$

Por el punto 7, el símbolo de Christoffel, en el caso de $\mu = 1$ es:

$$(51)\ \Gamma^1_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{\alpha 1}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta 1}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{1}}\right)$$

Por lo tanto:

$$(52)\ \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^{1}}\right) = \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial r}\right)$$

$$(53)\ \Gamma^1_{13} = \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{3}} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^{1}}\right) = 0$$

$$(54)\ \Gamma^1_{14} = \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{4}} + \frac{\partial g_{41}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial g_{14}}{\partial x^{1}}\right) = 0$$

$$(55)\ \Gamma^1_{33} = \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^{3}} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^{3}} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^{1}}\right) = -\frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial r}\right)$$

$$(56)\ \Gamma^1_{34} = \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^{4}} + \frac{\partial g_{41}}{\partial x^{3}} - \frac{\partial g_{34}}{\partial x^{1}}\right) = 0$$

$$(57)\ \Gamma^1_{44} = \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{41}}{\partial x^{4}} + \frac{\partial g_{41}}{\partial x^{4}} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x^{1}}\right) = \frac{1}{2} g^{11}\left(-\frac{\partial g_{44}}{\partial r}\right)$$

Por la (52) a la (57), la (50) se transforma en:[1777]

$$(58)\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial r}\right)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial r}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} g^{11}\left(-\frac{\partial g_{44}}{\partial r}\right)\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

Derivando obtenemos $\partial g_{11}/\partial r = -\alpha/(r-\alpha)^2$;[1778] $\partial g_{33}/\partial r = 2r$ y $\partial g_{44}/\partial r = -\alpha/r^2$. Por el punto 4, se sigue que $g^{11} = 1/g_{11} = (1-\alpha/r) = \dfrac{r-\alpha}{r}$. Con estos datos la (58) se queda como:

$$(59)\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)\left(\frac{-\alpha}{(r-\alpha)^2}\right)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)(2r)\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 +$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)\left(\frac{\alpha}{r^2}\right)\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(60)\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \left(\frac{-\alpha}{2r(r-\alpha)}\right)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - (r-\alpha)\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3}\right)\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

[1777] Tomando en cuenta que en el plano $\dot{\theta}^2 = 0$ y $g_{22} = g_{33}$, esta ecuación coincide con Hans Ohanian, *Gravitation and Spacetime* (1972): 287, ecuación [31] :

[1778] Por la regla del cociente: $\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{f(r)}{g(r)}\right) = \dfrac{f'(r)g(r) - f(r)g'(r)}{[g(r)]^2} \Rightarrow$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial r} = \frac{0 - 1(\alpha r^{-2})}{(1-\alpha r^{-1})^2} = \frac{-1(\alpha r^{-2})}{(1-\alpha r^{-1})^2} = \frac{-\alpha}{(r-\alpha)^2}$$

El ángulo φ como función del radio r

En síntesis, las tres ecuaciones de movimiento de un planeta en órbita en el campo gravitacional del Sol, derivadas a partir de la geodésica y la métrica de Schwarzschild, son la (22), la (35) y la (60):

(22) $$\frac{d^2t}{d\tau^2} + \frac{\alpha}{r(r-\alpha)}\frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0$$

(35) $$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = 0$$

(60) $$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \left(\frac{-\alpha}{2r(r-\alpha)}\right)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - (r-\alpha)\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3}\right)\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

Ahora bien, lo que queremos es el ángulo φ como función de r. Para lograr esto, multiplicamos primero los términos de la ecuación (35) con r^2 y obtenemos:

(61) $$r^2\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2r\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau}\left(r^2\frac{d\varphi}{d\tau}\right) = 0$$

El momento angular se define como $L = mr^2\frac{d\varphi}{d\tau}$, de modo que el término $r^2\frac{d\varphi}{d\tau}$ representa el momento angular dividido entre la masa de Mercurio, es decir, L/m . La derivada del momento angular es cero, de modo que el momento angular es constante:

(62) $$L/m = r^2\frac{d\varphi}{d\tau} \Rightarrow \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L/m}{r^2}.$$

La (61) se transforma en

(63) $$\frac{d}{d\tau}\left(r^2\frac{d\varphi}{d\tau}\right) = \frac{d(L/m)}{d\tau} = 0$$

Arriba vimos que $dt \cong d\tau \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{dt} \cong 1$.

Ahora vamos a transformar la ecuación (60). Por la regla de la cadena y la (62)

(64) $$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L/m}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2r}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{L/m}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right) = (L/m)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{dr}{d\varphi} + \frac{L/m}{r^2}\frac{d}{d\tau}\frac{dr}{d\varphi} =$$

(65) $$= (L/m)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{dr}{d\tau}\frac{dr}{d\varphi} + \frac{L/m}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\tau} =$$

$$= (L/m)\left(-\frac{2}{r^3}\right)\frac{L/m}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\frac{dr}{d\varphi} + \frac{L/m}{r^2}\frac{d^2r}{d\varphi^2}\frac{L/m}{r^2} = -2\frac{(L/m)^2}{r^5}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{(L/m)^2}{r^4}\frac{d^2r}{d\varphi^2}$$

Sustituimos ahora en la (60) $\dfrac{d\varphi}{d\tau}$ por $\dfrac{L/m}{r^2}$; $\dfrac{dr}{d\tau}$ por $\dfrac{L/m}{r^2}\dfrac{dr}{d\varphi}$; $\dfrac{d^2r}{d\tau^2}$ por $-2\dfrac{(L/m)^2}{r^5}\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2+\dfrac{(L/m)^2}{r^4}\left(\dfrac{d^2r}{d\varphi^2}\right)$ y $\dfrac{dt}{d\tau}$ por 1, y obtenemos:

$$(66)\quad \frac{-2(L/m)^2}{r^5}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{(L/m)^2}{r^4}\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{r(r-\alpha)}\right)\left(\frac{L/m}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$$
$$-(r-\alpha)\left(\frac{(L/m)^2}{r^4}\right)+\left(\frac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3}c^2\right)=0$$

Por las mismas sustituciones, la (22) se transforma en:

$$(22)\quad \frac{d^2t}{d\tau^2}+\frac{\alpha}{r(r-\alpha)}\frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau}=0$$

$$(67)\quad \frac{\alpha}{r(r-\alpha)}\frac{L/m}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}=0$$

Sustituyendo la (67) en el tercer término de la ecuación (66) y obtenemos:

$$(68)\quad \frac{-2(L/m)^2}{r^5}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{(L/m)^2}{r^4}\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right)-\frac{r(L/m)^2}{r^4}+\left(\frac{\alpha(L/m)^2}{r^4}\right)+\left(\frac{(\alpha r-\alpha^2)c^2}{2r^3}\right)=0\Rightarrow$$

Reagrupamos algunos términos:

$$(69)\quad \frac{-2(L/m)^2}{r^5}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{(L/m)^2}{r^4}\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right)+\frac{\alpha(L/m)^2}{r^4}-\left(\frac{\alpha^2c^2+2(L/m)^2}{2r^3}\right)+\left(\frac{\alpha c^2}{2r^2}\right)=0$$

Multiplicamos todos los términos con $\dfrac{r^2}{(L/m)^2}$

$$(70)\quad -2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\frac{1}{r^3}+\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right)\frac{1}{r^2}+\left(\frac{\alpha c^2}{2(L/m)^2}\right)-\left(\frac{\alpha^2c^2+2(L/m)^2}{2(L/m)^2}\right)\frac{1}{r}+\alpha\frac{1}{r^2}=0$$

Hacemos:

$$(71)\,\frac{1}{r}=u\quad\Rightarrow\ (72)\quad \frac{dr}{d\varphi}=\frac{dr}{du}\frac{du}{d\varphi}=\frac{du^{-1}}{du}\frac{du}{d\varphi}=-u^{-2}\frac{du}{d\varphi}\ \Rightarrow$$

$$(73)\quad \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=u^{-4}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\quad \text{y}$$

$$(74)\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right)=\frac{d}{d\varphi}\frac{dr}{d\varphi}=-\frac{d}{d\varphi}\left(u^{-2}\frac{du}{d\varphi}\right)=-\frac{du^{-2}}{d\varphi}\frac{du}{d\varphi}-u^{-2}\frac{d^2u}{d\varphi}=-\frac{du^{-2}}{du}\frac{du}{d\varphi}\frac{du}{d\varphi}-u^{-2}\frac{d^2u}{d\varphi}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right)=\left(2u^{-3}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2-u^{-2}\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)$$

Sustituimos (71), (73) y (74) en (70) y hacemos $(L/m)^2=l$

(75) $-2u^{-1}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+\left(2u^{-1}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2-\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)+\left(\frac{\alpha c^2}{2l}\right)-\left(\frac{\alpha^2c^2+2l}{2l}\right)u+\alpha u^2=0\Rightarrow$

(76) $\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)+\left(\frac{\alpha^2c^2+2l}{2l}\right)u-\alpha u^2=\frac{\alpha c^2}{2l}$

Hacemos otra sustitución de variable:

(77) $W=\frac{du}{d\varphi}\Rightarrow\frac{d^2u}{d\varphi^2}=\frac{dW}{d\varphi}=\frac{dW}{du}\frac{du}{d\varphi}=W\frac{dW}{du}$

Sustituimos la (77) en la (76):

(78) $\left(W\frac{dW}{du}\right)=\alpha u^2-\left(\frac{\alpha^2c^2+2l}{2l}\right)u+\frac{\alpha c^2}{2l}$

Integramos:

(79) $\int WdW=\frac{1}{2}W^2=\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=\int[\alpha u^2-\left(\frac{\alpha^2c^2+2l}{2l}\right)u+\frac{\alpha c^2}{2l}]du\ \Rightarrow$

(80A) $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=\int[2\alpha u^2-\left(\frac{\alpha^2c^2+2l}{l}\right)u+\frac{\alpha c^2}{l}]du$

(80B) $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=\frac{2\alpha}{3}u^3-\left(\frac{\alpha^2c^2+2l}{2l}\right)u^2+\frac{\alpha c^2}{l}u+K$

(80C) $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)=\sqrt{}[\frac{2\alpha}{3}u^3-\left(\frac{\alpha^2c^2+2l}{2l}\right)u^2+\frac{\alpha c^2}{l}u+K]$

(80D) $du=\sqrt{}[\frac{2\alpha}{3}u^3-\left(\frac{\alpha^2c^2+2l}{2l}\right)u^2+\frac{\alpha c^2}{l}u+K]\,d\varphi$

Despejamos $d\varphi$ y luego integramos, tomando $\varphi_1=0$, al inicio de una órbita

(81) $d\varphi=\dfrac{du}{\sqrt{\frac{2\alpha}{3}u^3-\left(\frac{\alpha^2c^2+2l}{2l}\right)u^2+\frac{\alpha c^2}{l}u+K}}\quad\Rightarrow$

(82) $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \varphi - \varphi_1 = \varphi - 0 = \varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\frac{1}{\sqrt{\frac{2\alpha}{3}u^3 - \left(1 + \frac{\alpha^2 c^2}{2l}\right)u^2 + \frac{\alpha c^2}{l}u + K}}]\, du$

En esta ecuación, el ángulo φ representa medio ciclo de la órbita elíptica de Mercurio, c (la velocidad de la luz), l el cuadrado del momento angular por unidad de masa, K una constante por determinar. En las ecuaciones de Einstein solamente figuran las constantes a (el semieje mayor de Mercurio), α (la constante de g_{44} en la métrica de Schwarzschild), y $\alpha_1 = \frac{1}{a(1-e)}\, m^{-1}$ y $\alpha_2 = \frac{1}{a(1+e)}\, m^{-1}$. Dado que $l = a(1-e^2)GM$ y $\alpha = \frac{2GM}{c^2}$, se sigue que $\frac{c^2}{l} = \frac{2}{\alpha\, a(1-e^2)}$. Dado, además, que $\alpha_1 \alpha_2 = -\frac{1}{a^2(1-e^2)}$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{2}{a(1-e^2)}$ se sigue que $a = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_1 \alpha_2}$. Por lo tanto $\frac{\alpha c^2}{l} = (\alpha_1 + \alpha_2)$. Así podemos reescribir la (82) como sigue:

(83 A) $\varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\frac{1}{\sqrt{\frac{2\alpha}{3}u^3 - \left(1 + \frac{\alpha(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}\right)u^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)u + K}}]\, du$

Todavía no tenemos ***el valor de*** K. Lo podemos obtener a partir de la ecuación (80 B):

(80B) $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2\alpha}{3}u^3 - \left(1 + \frac{\alpha^2 c^2}{2l}\right)u^2 + \frac{\alpha c^2}{l}u + K$

Dado que $r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\,Cos[\varphi]}$, se sigue que $r_{\min} = a(1-e)$ cuando $\varphi = 0$, $\cos[\varphi] = 1$ y $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 0$. En este caso, $u_{\max} = \frac{1}{r_{\min}} = \frac{1}{a(1-e)} = \alpha_1$ y, por lo tanto, obtenemos:[1779]

(80C) $K = -\frac{2\alpha}{3}\alpha_1^{\;3} + \alpha_1^{\;2} + \left(\frac{\alpha(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}\right)\alpha_1^{\;2} - \alpha_1^{\;2} - \alpha_1\alpha_2 \cong -\alpha_1\alpha_2 = -3.113552 * 10^{-22}$

Con este resultado, la ecuación (83 A) se transforma en la (83 B):

(83 B) $\varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\frac{1}{\sqrt{\frac{2\alpha}{3}u^3 - \left(1 + \frac{\alpha(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}\right)u^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)u - \alpha_1\alpha_2}}]\, du$

VI C 2. Los valores de las constantes y variables

[1779] $K = -(1/6)\alpha\alpha_1^{\;3} + (1/2)\alpha\alpha_1^{\;2}\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2 = -\alpha_1\alpha_2 = -3.113552 * 10^{-22}$. El factor $-(1/6)\alpha\alpha_1^{\;3} + (1/2)\alpha\alpha_1^{\;2}\alpha_2 = 3.56781 * 10^{-30} \approx 0$ es despreciable.

a) $p = a(1-e^2) = 5.54621*10^{10}\ m$ (una variable de geometría de la elipse)

b) $L = m\sqrt{pGM} = 8.95887*10^{30}\ kgm^2 s^{-1}$ (momento angular)[1780]

c) $\frac{L}{m} = 2.7316*10^{15}\ m^2 s^{-1}$ (momento angular por unidad de masa)

d) $l = \left(\frac{L}{m}\right)^2 = a(1-e^2)GM = 7.36126*10^{10}\ m^4\ s^{-2}$ (*idem* al cuadrado)

e) $G = 6.67259*10^{-11}\ kg^{-1}m^3 s^{-2}$ (constante gravitacional)

f) $M = 1.989*10^{30}\ kg$ (masa Sol)

g) $m = 3.302*10^{23}\ kg$ (masa Mercurio)

h) $c = 2.99792458*10^8\ m s^{-1}$ (velocidad de la luz)

i) $e = 0.20563$ (excentricidad)

j) $b = 5.667*10^{10}\ m$ (semieje menor)

k) $r_{\min} = a(1-e) = 4.60037*10^{10}\ m$ (distancia mínima planeta al centro)

l) $r_{\max} = a(1+e) = 6.98163*10^{10}\ m$ (distancia máxima planeta al centro)

m) $\alpha = \frac{2GM}{c^2} = 2949.47\ m$ (constante de la métrica de Schwarzschild)

n) $\alpha_1 = \frac{1}{a(1-e)} = 2.17374*10^{-11}\ m^{-1}$ (inverso del radio mínimo)

o) $\alpha_2 = \frac{1}{a(1+e)} = 1.43233*10^{-11}\ m^{-1}$ (inverso del radio máximo)

p) $a = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_1\alpha_2} = 5.791*10^{10}\ m$ (semieje mayor)

q) $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\,Cos[\varphi]} = \frac{5.54621*10^{10}}{1+0.2056\,Cos[\varphi]}\ m$ (radio)

r) $u = 1/r = 1.80303*10^{-11}(1+0.2056\,Cos[\varphi])\ m^{-1}$ (inverso del radio)

s) $\pi = 3.141592654... = 648{,}000''$ (arco segundos)

t) $T = 7.59*10^6\ s$ (período)

u) $K = -\frac{1}{6}\alpha\alpha_1{}^3 + \frac{1}{2}\alpha\alpha_1{}^2\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2 = -\alpha_1\alpha_2 = -3.113552*10^{-22}$ (nota[1781])

v) En el artículo de Einstein: $B = \sqrt{\frac{l}{c^2}} = \frac{L/m}{c} = 9.05008*10^6$

w) En el artículo de Einstein: $A = -\frac{1}{2}(\alpha_1\,\alpha_2)B^2 = 1.27506*10^{-8}$

[1780] Véase la ecuación 72 del Apéndice II sobre Kepler y Newton

[1781] El factor $-(1/6)\alpha\alpha_1{}^3 + (1/2)\alpha\alpha_1{}^2\alpha_2 = 3.56781*10^{-30} \approx 0$ es despreciable.

x) En el artículo de Einstein: $K = \frac{2A}{B^2} = -\alpha_1\alpha_2 = -3.113552 * 10^{-22}$

VI C 3. La solución empírica de esta integral para el caso de Mercurio

Si con el programa *Mathematica* de Wolfram sacamos esta integral numérica, no obtenemos el valor esperado de 3.14159... (π más algo), sino 3.14139 (π radianes). Esto no es sorprendente, porque existe una extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. Ni las observaciones empíricas del perihelio de Mercurio ni el valor de las constantes pueden ser tan precisas, que realmente se pueda predecir el valor exacto de la rotación del perihelio de Mercurio. ¡*Una mínima variación de las decimales de algunas constantes como la velocidad de la luz c, la constante gravitacional G, la masa del Sol M, el semieje mayor a y la excentricidad e de Mercurio, genera variaciones en los resultados por encima o por abajo del valor de π radianes!* Aunque conocemos con cierta precisión la velocidad de la luz y la constante gravitacional, la masa del Sol (que, además, se reduce al año en $26.14 * 10^{15}$ kilos [1782]), el semieje mayor, y la excentricidad son estimaciones confiables, pero con cierto margen de error. Este margen de error es suficiente para influir decisivamente en los resultados. Y realmente, esto no es sorprendente, dado que una órbita completa de 2π radianes contiene 1,296,000 arco segundos en un año de Mercurio (88 días), y estamos buscando, por lo tanto, una adición a este monto de 0.1037 arco segundos, es decir, solamente 0.000008001543 % adicional.

Einstein optó por un camino diferente. En el siguiente apartado veremos cómo él simplificó la ecuación en función del resultado esperado. *Sin embargo, el hecho de que Einstein ajustó esta ecuación varias veces en función del resultado esperado*[1783] *significa, lógicamente, que la coincidencia del resultado obtenido con la rotación empírica del perihelio de Mercurio,* ***no corroboró su teoría general, sino solamente demostró la compatibilidad*** *de este resultado empírico con su teoría.* Si la solución de la ecuación exacta (la nuestra) no da el resultado exacto, menos la solución de la aproximación de Einstein. Tal vez, esto haya querido decir Barbara Cline, cuando dijo que se trata de una "*escasa verificación*".[1784]

VI C 4. Einstein elige las aproximaciones en función del resultado esperado

Mediante un procedimiento exacto obtuvimos el ángulo φ, en el transcurso de medio ciclo, de α_2 a α_1, de la órbita de Mercurio (ecuación 83 B).

(83 B) $$\varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{2\alpha}{3}u^3 - \left(1 + \frac{1}{2}\alpha(\alpha_1 + \alpha_2)\right)u^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)u - \alpha_1\alpha_2}} \right] du$$

[1782] Cada segundo se transforman 584 millones de toneladas de hidrógeno en unos 580 millones de toneladas de helio, transformando unos 4 millones de toneladas de masa en energía. La disminución de la masa del Sol es, entonces, *al año* $4 * 10^9 * 31{,}536{,}000 = 126.144 * 10^{15}$ *kilos*

[1783] Véase a continuación la Sección VI C 3

[1784] Barbara L. Cline, *Los creadores de la nueva física* (1973): 295

Con métodos estimativos, Einstein obtuvo *una aproximación* semejante al resultado exacto y estimó también el valor de K (la ecuación 84).[1785]

$$(84)\ \varphi = (1+\alpha(\alpha_1+\alpha_2))\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{1}{\sqrt{\alpha u^3-(1+\alpha(\alpha_1+\alpha_2))u^2+(\alpha\alpha_1\alpha_2+\alpha_1+\alpha_2)u-\alpha_1\alpha_2)}}du$$

Invito al lector a que compare la ecuación exacta (83 B) con la aproximada de Einstein (84). Al comparar la ecuación exacta (la 83 B) con la aproximación de Einstein (la 84), aparecen las siguientes diferencias:

La ecuación exacta (83 B)	***La ecuación aproximada de Einstein (84)***
1	$1+\alpha(\alpha_1+\alpha_2)=1.0000001065498516$
$(2/3)\alpha=1969.81$	$\alpha=2954.71$
$1+(1/2)\alpha(\alpha_1+\alpha_2)=1.0000000531806374$	$1+\alpha(\alpha_1+\alpha_2)=1.0000001065498516$
$\alpha_1+\alpha_2=3.606114816681*10^{-11}$	$\alpha\alpha_1\alpha_2+\alpha_1+\alpha_2=3.6061149085141*10^{-11}$
$K=-\frac{1}{6}\alpha\alpha_1^{\ 3}+\frac{1}{2}\alpha\alpha_1^{\ 2}\alpha_2$ $-\alpha_1\alpha_2=-3.113552*10^{-22}$	$K=-\alpha_1\alpha_2=-3.11353*20^{-22}$

La diferencia entre 1 y 1.0000001065498516 parece pequeña, pero invito al lector a recordar lo que acabo de decir arriba, a saber, "*una órbita completa de* 2π *radianes contiene 1,296,000 arco segundos en un año de Mercurio (88 días), y estamos buscando, por lo tanto, una adición a este monto de* 0.1037 *arco segundos, es decir, solamente 0.000008001543 % adicional*." Esta mínima diferencia entre 1 y 1.0000001065498516 explica más o menos la rotación del perihelio de Mercurio, que Einstein está buscando. Al añadir $\alpha(\alpha_1+\alpha_2)$ a la unidad, él ajusta la ecuación en función del resultado deseado.

La diferencia entre $(2/3)\alpha$ y α es grande, pero multiplicado con $u^3=1/r^3$ (cuyo valor es variable, pero tomamos su valor máximo en esta comparación), la diferencia llega a ser relativamente pequeña, a saber, $(2/3)\alpha u^3\cong 2*10^{-29}$ y $\alpha u^3\cong 3*10^{-29}$.

Con todo, esta ecuación de Einstein es *una primera simplificación y aproximación* de la ecuación exacta.

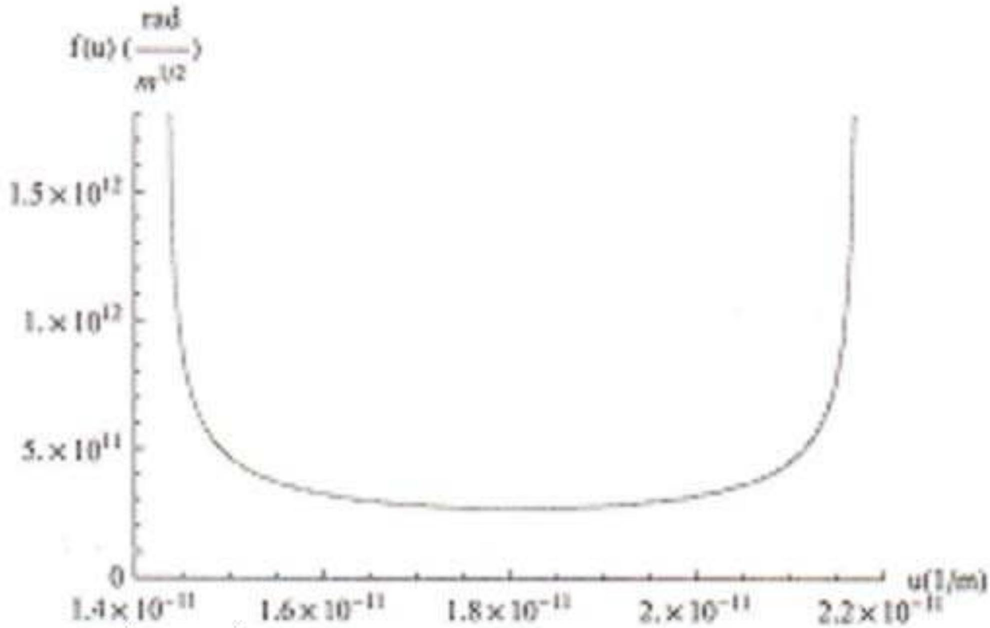
Podemos factorizar la ecuación (84) para obtener:

$$(85)\ \varphi=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{1+\alpha(\alpha_1+\alpha_2)}{\sqrt{-(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(1-\alpha u)}}du$$

1785 Albert Einstein, "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity," en: *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte* (1915), traducido al inglés en *The Collected Works of Albert Einstein,* vol. 6 (1989): 116

El programa Mathematica de Wolfram puede evaluar esta integral numéricamente y graficarla. En la siguiente gráfica, el área bajo la curva representa la evaluación de esta integral, de α_2 a α_1, es decir el perihelio de Mercurio (medio ciclo = π) más su desplazamiento por el campo gravitacional del Sol (ε = 0.000008001543 % de π):

Gráfica. Perihelio de Mercurio más la rotación del perihelio en media órbita



EXPLICACIÓN: EL ÁREA BAJO LA CURVA, DE ALPHA DOS A ALPHA UNO, REPRESENTA EL PERIHELIO DE MERCURIO (LA MITAD DE SU ÓRBITA EN UN AÑO) MÁS LA ROTACIÓN DEL PERIHELIO PREDICHA POR LA TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD, DE EINSTEIN

Podemos simplificar la ecuación (85), usando el teorema de las series de Taylor, a saber, $f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k f(u)}{du^k} \frac{u^k}{k!}$

En nuestro caso:

$$\text{(86 A)} \quad \frac{1}{\sqrt{1-\alpha u}} = (1-\alpha u)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left. \frac{d^k (1-\alpha u)}{du^k} \right|_{u=0} \frac{u^k}{k!} \quad (k = 0,1,2,......,\infty) \quad \Rightarrow$$

$$\text{k=0)} \quad \frac{d^0 (1-\alpha u)^{-1/2}}{du^0} \Big|_{u=0} \frac{u^0}{0!} = (1-\alpha(0))^{-1/2} \frac{u^0}{0!} = (1)^{-1/2} \frac{1}{1} = 1*1 = 1$$

$$\text{k=1)} \quad \frac{d^1 (1-\alpha u)^{-1/2}}{du^1} \Big|_{u=0} \frac{u^1}{1!} = -\frac{1}{2}(-\alpha)(1-\alpha(0))^{-1/2} \frac{u}{1} = \frac{1}{2}\alpha\,(1)^{-3/2} u = \frac{1}{2}\alpha u$$

$$\text{k=2)} \quad \frac{d^2 (1-\alpha u)^{-1/2}}{du^2} \Big|_{u=0} \frac{u^2}{2!} = \frac{d(\frac{1}{2}\alpha)(1-\alpha u)^{-3/2}}{du} \frac{u^2}{2} = -\frac{3}{4}\alpha(-\alpha)(1-\alpha u)^{-5/2} \frac{u^2}{2} = \frac{3}{8}\alpha^2 u^2$$

etcétera

Sumando la (k=0) + (k=1) + (k=2) + ...+ ($k=\infty$), obtenemos :

(86 B) $$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha\,u}} = (1-\alpha\,u)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^k(1-\alpha\,u)}{du^k}\Big|_{u=0} * \frac{u^k}{k!} = 1+\frac{1}{2}\alpha\,u+\frac{3}{8}\alpha^2u^2+..... \approx 1+\frac{1}{2}\alpha\,u$$

Por lo tanto, la (85) se transforma en la (87):

(87 A) $$\varphi \cong [1+\alpha(\alpha_1+\alpha_2)][\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{1+\frac{1}{2}\alpha\,u}{\sqrt{-(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)}}du \quad (^{\text{nota } 1786}) \Rightarrow$$

(87 B) $$\varphi \cong [1+\alpha(\alpha_1+\alpha_2)][\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{1}{\sqrt{-(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)}}du + \frac{1}{2}\alpha\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{u}{\sqrt{-(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)}}du]$$

Tratemos ahora ambos integrales por separado:

(88 A) $\varphi \cong [1+\alpha(\alpha_1+\alpha_2)][X+Y]$

(88 B) $$X=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{1}{\sqrt{-(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)}}du$$

(88 C) $$Y=\frac{1}{2}\alpha\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{u}{\sqrt{-(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)}}du$$

Primero reescribimos el término común a ambos integrales en el denominador:

(89) $$(u-\alpha_1)(u-\alpha_2) = u^2-(\alpha_1+\alpha_2)u+\alpha_1\alpha_2 =$$
$$u^2-(\alpha_1+\alpha_2)u+\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2+\alpha_1\alpha_2 \Rightarrow$$

(90) $$(u-\alpha_1)(u-\alpha_2) = \left(u-\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\right)^2+\alpha_1\alpha_2-\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2$$

Sustituimos la (90) en la (88 B) y la (88 C) para obtener la (91) y la (92):

(91) $$X=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{1}{\sqrt{-\left[\left\{u-\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\right\}^2+\alpha_1\alpha_2-\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2\right]}}du$$

(92) $$Y=\frac{1}{2}\alpha\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{u}{\sqrt{-\left[\left\{u-\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\right\}^2+\alpha_1\alpha_2-\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2\right]}}du$$

Reordenamos los términos:

[1786] Albert Einstein, "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity," en: *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte* (1915), traducido al inglés en *The Collected Works of Albert Einstein,* vol. 6 (1989): 116

$$(93)\quad X=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{1}{\sqrt{\left[-\left\{u-\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\right\}^2+\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2-\alpha_1\alpha_2\right]}}du$$

$$(94)\quad Y=\frac{1}{2}\alpha\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{u}{\sqrt{\left[-\left\{u-\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\right\}^2+\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2-\alpha_1\alpha_2\right]}}du$$

Ahora procedemos con un cambio de variables:

$$(95)\quad u=x+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\quad\Rightarrow\quad x=u-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$$

$$(96)\quad dx/du=1\Rightarrow dx=du$$

Sustituimos (95) y (96) en (93) y (94) para obtener (97) y (98):

$$(97)\ X=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{1}{\sqrt{\left[-x^2+\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2-\alpha_1\alpha_2\right]}}dx$$

$$(98)\ Y=\frac{1}{2}\alpha\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{x+\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)}{\sqrt{\left[-x^2+\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2-\alpha_1\alpha_2\right]}}dx$$

Definimos Z:

$$(99)\ Z=\frac{1}{2}\alpha\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)}{\sqrt{\left[-x^2+\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2-\alpha_1\alpha_2\right]}}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{1}{\sqrt{\left[-x^2+\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2-\alpha_1\alpha_2\right]}}dx=$$

Combinando (X+ Z), obtenemos XX:

$$(100)\quad XX=(X+Z)=\left[1+\frac{1}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\right]\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{1}{\sqrt{\left[-x^2+\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2-\alpha_1\alpha_2\right]}}dx$$

Y tomando (Y – Z), obtenemos YY:

(101) $YY= (Y\text{-}Z)= \frac{1}{2}\alpha \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{x}{\sqrt{\left[-x^2+\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2-\alpha_1\alpha_2\right]}}dx$

Ahora bien, combinando (88 A), (100) y (101), obtenemos:

(102) $\varphi \cong [1+\alpha(\alpha_1+\alpha_2)][X+Y]=[1+\alpha(\alpha_1+\alpha_2)][X+Z+Y-Z] \Rightarrow$

$\varphi \cong [1+\alpha(\alpha_1+\alpha_2)]\,[XX+YY]$

Hagamos una nueva sustitución de variables:

(103) $z=-x^2+\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2-\alpha_1\alpha_2 \quad \Rightarrow$

(104 A) $dz/dx=-2x \Rightarrow dz=-2xdx \quad \Rightarrow$

(104 B) $xdx=-\frac{1}{2}dz$

Sustituimos (103) y (104 B) en (101):

(105) $YY= -\frac{1}{4}\alpha \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{1}{\sqrt{z}}dz = -\frac{1}{4}\alpha\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} z^{-1/2}dz = -\frac{1}{2}\alpha\,\{z^{1/2}\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}\}$

Sustituimos en (105) $z=-x^2+\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2-\alpha_1\alpha_2$ y $x=u-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$, para obtener (106):

(106) $YY=(-\frac{1}{2}\alpha)\{[-\left(u-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2-\alpha_1\alpha_2]^{1/2}\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}\}=$

$=(-\frac{1}{2}\alpha)\{[-u^2+(\alpha_1+\alpha_2)u-\alpha_1\alpha_2]^{1/2}\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}\}=$

$=(-\frac{1}{2}\alpha)\{[-\alpha_2\alpha_2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_2-\alpha_1\alpha_2]^{1/2}-[-\alpha_1\alpha_1+\alpha_1\alpha_1+\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_2]^{1/2}\}=0$

Recordemos:

(100) $XX= [1+\frac{1}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)]\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{1}{\sqrt{\left[-x^2+\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2-\alpha_1\alpha_2\right]}}dx \Rightarrow$

(107) $XX= [1+\frac{1}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)]\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{1}{\sqrt{g^2-x^2}}dx$

en donde $g=\pm\sqrt{-\alpha_1\alpha_2+\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)^2}$

La (107) se transforma en la (108), por la integración de una función trigonométrica inversa:[1787]

$$(108)\ XX= [1+\frac{1}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)]\,\{Sen^{-1}[\frac{x}{g}]\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}\}=$$

$$=[1+\frac{1}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)]\,\{Sen^{-1}[\frac{u-\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)}{\pm\sqrt{-\alpha_1\alpha_2+\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)^2}}]\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}\}=$$

$$=[1+\frac{1}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)]\,\{Sen^{-1}[\frac{\alpha_2-\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)}{\pm\sqrt{-\alpha_1\alpha_2+\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)^2}}]$$

$$-Sen^{-1}[\frac{\alpha_1-\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)}{\pm\sqrt{-\alpha_1\alpha_2+\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)^2}}]\}$$

Tenemos dos opciones: A) el signo positivo (+) antes de la raíz o B) el signo negativo (-) antes de la raíz. La opción A nos da:

$$(109\ A)\ XX=[1+\frac{1}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)]\,\{Sen^{-1}[-1]-Sen^{-1}[+1]\}=$$

$$=[1+\frac{1}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)]\,\{-0.5\pi-(0.5\pi)\Rightarrow$$

$$(110\ A)\ XX=-\pi[1+\frac{1}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)]$$

La opción B nos da:

$$(109\ B)\ XX=[1+\frac{1}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)]\,\{Sen^{-1}[+1]-Sen^{-1}[-1]\}=$$

$$=[1+\frac{1}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)]\,\{0.5\pi-(-0.5\pi)\Rightarrow$$

$$(110\ B)\ XX=\pi[1+\frac{1}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)]$$

Obviamente, la opción B (ecuación 110 B) con el signo positivo es la buena. Recordemos:
(106) YY=0

Por lo tanto, con base en la (102), (106) y (110 B), obtenemos:

$$(111)\ \varphi\cong[1+\alpha(\alpha_1+\alpha_2)][XX+YY]=$$

[1787] Véanse B. Peirce & Ronald Foster, *A Short Table of Integrals*, 4th ed. (1956): ecuación 130, pág. 22; y Ron Larson & Bruce Edwards, *Cálculo* (2006): teorema 5.17, página 380

$$\varphi \cong \pi\,[1+\alpha(\alpha_1+\alpha_2)][1+\frac{1}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)] =$$
$$=\pi\,(1+\frac{5}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{1}{4}\alpha^2(\alpha_1+\alpha_2)^2 =$$
$$\pi+\frac{5\pi}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\pi}{4}\alpha^2(\alpha_1+\alpha_2)^2 =$$

Este es el resultado de media órbita. Para obtener una órbita completa (2π), hemos de multiplicar con 2 y la rotación ε del perihelio es:

(112) $\varepsilon = \frac{5\pi}{2}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\pi}{2}\alpha^2(\alpha_1+\alpha_2)^2$

Dado que $\pi = 648{,}000\ \textit{arco segundos}$, se sigue que en un año, la rotación del perihelio es:

(113) $\varepsilon_{\textit{año Mercurio}} = 0.17\ \textit{arco segundos}$,

y dado que un año de Mercurio son 88 días, la rotación del perihelio en un siglo terrestre es:

(114) $\varepsilon_{\textit{siglo terrestre}} = 70\ \textit{arco segundos}$

El resultado obtenido de 70 arco segundos no coincide exactamente con los 43 arco segundos esperados por Einstein. Ahora, él ajusta sus ecuaciones por segunda vez, para obtener el resultado esperado, para quedar como sigue:

(115) $\varphi = \pi\left[1+\frac{3}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\right]$ (nota [1788]).

En la métrica (-, -, -, +) que Einstein usa, $g_{44} = \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)$, se sigue que $\alpha = \frac{2GM}{c^2}$ (nota [1789]). Además, "α_1 *y* α_2 *representan los valores recíprocos de la distancia máxima y mínima del Sol, respectivamente,*"[1790] es decir, $\alpha_1 = \frac{1}{r_{\max}} = \frac{1-e}{a(1-e^2)}$ y $\alpha_2 = \frac{1}{r_{\min}} = \frac{1+e}{a(1-e^2)}$ (nota [1791]). El término a es el semieje mayor y e es la excentricidad de la órbita elíptica. Haciendo la sustitución de $\alpha_1+\alpha_2 = \frac{2}{a(1-e^2)}$, se obtiene:[1792]

[1788] *Ibidem*: 116, ecuación (13)
[1789] Véanse las ecuaciones 4 y 5 de este apéndice
[1790] Albert Einstein, "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity," en: *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte* (1915), traducido al inglés en: *The Collected Works of Albert Einstein,* vol. 6 (1989): 116
[1791] Véase las ecuaciones (113), (114) y (116) del Apéndice II sobre Kepler y Newton
[1792] Albert Einstein, "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity," en: *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte* (1915), traducido al inglés en: *The Collected Works of Albert Einstein,* vol. 6 (1989): 116, , ecuación (12)

(115) $\varphi = \pi + \frac{3}{2}\pi \frac{\alpha}{a(1-e^2)}$ ([nota 1793]).

Si multiplicamos ambos lados con 2, obtenemos una órbita completa (2π), más algo extra, a saber, el desplazamiento del perihelio en una órbita, definido por Einstein como ε: "*después de una órbita completa, el perihelio avanza con*":[1794]

(116) $\varepsilon = 3\pi \frac{\alpha}{a(1-e^2)}$

En seguida, Einstein introduce el periodo orbital T,[1795] *sin decir que para esto usa la tercera ley de Kepler en su forma aproximada*:[1796]

(117) $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$

Aunque Einstein no lo dice, con esta ecuación podemos redefinir el término α por él usado en sus ecuaciones, a saber:

(118) $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \Rightarrow GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \Rightarrow \alpha = \frac{2GM}{c^2} = \frac{8\pi^2 a^3}{T^2 c^2}$

Si sustituimos $\alpha = 8\pi^2 \frac{a^3}{T^2 c^2}$ en $\varepsilon = 3\pi \frac{\alpha}{a(1-e^2)}$, obtenemos la última ecuación del artículo de Einstein, con la cual pretende calcular la rotación del perihelio de Mercurio en un siglo y corroborar su teoría general:[1797]

(119) $\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}$

Si el lector mete los valores empíricos de la órbita de Mercurio a la ecuación de ε, se topa con una sorpresa desagradable. *No se obtiene el resultado esperado. La razón es que Einstein da, implícitamente (no lo aclara), al término π dos valores enteramente distintos.* En el término π^2 que viene de la tercera ley de Kepler, π tiene el valor de $\pi = 3.141592654$, pero el término π

[1793] Albert Einstein, "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity," en: *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte* (1915), traducido al inglés en: *The Collected Works of Albert Einstein,* vol. 6 (1989): 116, ecuación 13

[1794] Albert Einstein, "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity," en: *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte* (1915), traducido al inglés en: *The Collected Works of Albert Einstein,* vol. 6 (1989): 116

[1795] Albert Einstein, "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity," en: *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte* (1915), traducido al inglés en: *The Collected Works of Albert Einstein,* vol. 6 (1989): 116

[1796] Véase la ecuación (136) del Apéndice II sobre Kepler y Newton

[1797] Albert Einstein, "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity," en: *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte* (1915), traducido al inglés en: *The Collected Works of Albert Einstein,* vol. 6 (1989): 116, ecuación (14) que viene de su ecuación (13) debe expresarse en arco segundos, a saber $\pi = 648{,}000''$, de modo que:

(120) $\pi^3 = \pi_{ar\cos} * \pi^2 = (648{,}000) * (3.141592654)^2$

Ya tomando en cuenta todo esto, obtenemos la rotación del perihelio de Mercurio en una sola órbita de 2π radianes:[1798]

(121) $\varepsilon = 0.1037''$ / órbita

Dado que una órbita de Mercurio dura 87.892 días, hemos de transformar este resultado para obtener la rotación del perihelio en un siglo terrestre:

(122) $\varepsilon = \frac{36500}{87{,}892} * 0.1037 \cong 43''/$ siglo

De hecho, esto no es la rotación empírica del perihelio. La rotación total es 574´´ arco segundos por siglo. De estos 574´´, unos 531´´ se deben a la influencia de los demás planetas del sistema solar, como ya había calculado Newton. *La teoría general explica la rotación adicional que faltaba,* es decir 43´´, como él mismo dice:

"*El cálculo arroja para el planeta Mercurio un avance del perihelio de 43´´ por siglo, cuando los astrónomos apuntan* $45''\pm 5''$ *por siglo como la diferencia no explicada entre sus observaciones y la teoría newtoniana.* ***Mi teoría, entonces, está completamente de acuerdo con las observaciones***". [1799]

Si bien es cierta esta conclusión de Einstein, hemos comprobado en este ensayo ***que se trata de una compatibilidad, no de una corroboración.*** En su artículo, Einstein hace tantos malabarismos, que yo no creo que los miembros de la Real Academia de Ciencias de Prusia, en noviembre de 1915, ni las personas que hoy día se dan la pena de consultar el artículo de Einstein, hayan reconstruido su razonamiento, razón por la cual ofrecimos al lector interesado la reconstrucción llevada a cabo en este ensayo.

[1798] El resultado coincide más o menos con el obtenido por Steven Weinberg*, Gravitation and Cosmology* (1972): 198, a saber, $\Delta\varphi = 0.1038''$

[1799] Albert Einstein, "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity," en: *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte* (1915), traducido al inglés en: *The Collected Works of Albert Einstein,* vol. 6 (1989): 116. mis negrillas