APÉNDICE VIII. *ALGUNAS ECUACIONES ASTROFÍSICAS*

por John Auping Birch con la asesoría de Anabel Arrieta Oscos y Leonid Gueorguiev

A LUMINOSIDAD, INTENSIDAD, DENSIDAD DE FLUJO, Y MAGNITUD

A.1 Intensidad

Si *la misma cantidad de energía* ΔE pasa por dos elementos de superficie dA_1 y dA_2 y el elemento ΔA_1 es más pequeño que el otro elemento ΔA_2, es obvio que la intensidad de la radiación en el primer caso es mayor que en el segundo. Por lo tanto, **la intensidad** es proporcional a la inversa de este elemento ΔA por donde pasa la radiación: $I \propto \frac{1}{\Delta A}$.

Además, esta radiación puede pasar por este elemento ΔA de manera más dispersa o de manera más concentrada. La energía emitida por una fuente puede irradiar isotrópicamente hacia todo el espacio alrededor de la fuente, pero también es posible, en el otro extremo, que salga en una dirección solamente, como, por ejemplo, un rayo láser. Obviamente, en el segundo caso la radiación es mucho más intensa que en el primero. Para medir la variación de la intensidad según este concepto, se introduce el concepto del **ángulo sólido** ω. Nos imaginamos un cono, con una distancia r del vértice a la base $\Delta\sigma$ del cono. Si la superficie equivale el cuadrado de la distancia ($\Delta\sigma = r^2$), obtenemos la unidad del ángulo sólido, un **steradián**: $1sr = \frac{1}{4\pi}\omega = \frac{r^2}{r^2}$. Así, el **ángulo sólido total** (que abarca toda la esfera) es: $\omega = (4\pi)sr$ (nota [1802]) y la relación entre el ángulo sólido y el elemento $\Delta\sigma$ es: $\Delta\omega = \frac{\Delta\sigma}{4\pi r^2}\omega = \frac{\Delta\sigma}{r^2}sr$. En el caso de una esfera con radio unitario $r = |\bar{r}| = 1$, $\Delta\omega = \Delta\sigma$.

Obviamente, si *la misma cantidad de energía* pasa por una sección de un cono con un ángulo $d\omega$ sólido más grande, comparada con una sección de otro cono con ángulo sólido más pequeño, se sigue que en el segundo caso la radiación es más intensa que en el primer caso. Con otras palabras, la intensidad es inversamente proporcional al ángulo sólido: $I \propto \frac{1}{\Delta\omega}$.

Ahora queremos medir la cantidad de energía que en un momento dado pasa por un volumen, definido por una sección del cono delimitada, por un lado, por ΔA y, por otro lado, por $\Delta\omega = \Delta\sigma$, a una frecuencia dada (recuerda que según Planck $E = h\nu = 2\hbar\pi\nu$) en un rango de frecuencia de $\Delta\nu$.

Por lo tanto, la función de **la intensidad específica** es la siguiente:

[1802] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 393; Bradley Carroll & Dale Ostlie, *Modern Astrophysics* (1996): 170 (NB: Carroll & Ostlie usan los símbolos $d\sigma$ y dA, para el elemento de la superficie de la fuente de energía y el elemento de la superficie de la esfera, respectivamente; siguiendo el uso de Karttunen, yo uso ambos símbolos en el sentido inverso).

$$I_\nu = \frac{\Delta E_\nu}{\Delta A \Delta\omega \Delta\nu \Delta t}$$ (dimensión: $Wm^{-2}Hz^{-1}sr^{-1}$) (nota 1803)

Supongamos ahora que los vectores normales de los centros de ambas superficies que definen la sección del cono, no son paralelas. El vector normal de $\Delta\omega = \Delta\sigma$ hace un ángulo θ con el vector normal de la superficie ΔA. Por lo tanto, la proyección de la superficie ΔA en un plano con un vector normal paralelo al vector normal de $\Delta\omega = \Delta\sigma$ es $\Delta A_n = \cos\theta \Delta A$, lo que nos obliga reescribir la función de la intensidad como sigue:

$$I_\nu = \frac{\Delta E_\nu}{\cos\theta \Delta A \Delta\omega \Delta\nu \Delta t}$$ (dimensión: $Wm^{-2}Hz^{-1}sr^{-1}$)

De esta última función de la intensidad se deduce **la función de la energía específica**:

$$\Delta E_\nu = I_\nu \cos\theta \Delta A \Delta\omega \Delta\nu \Delta t$$ (dimensión: $Ws = Js^{-1}s = J$) (nota 1804)

La intensidad total se obtiene sumando las intensidades específicas de todas las frecuencias y, por lo tanto, se define como la cantidad de energía total que pasa en un momento dado por una sección de un cono delimitada por dA y $d\omega$:

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta A \Delta\omega \Delta t}$$ (dimensión: $Wm^{-2}sr^{-1}$)

A.2 La densidad de flujo como función de la intensidad

A estas alturas podemos definir la densidad de flujo F. *"La densidad de flujo es una medida del flujo neto de energía que fluye a través de un área ΔA, en un tiempo Δt, en un rango específico del espectro $\Delta\nu$"* (nota 1805). Esta energía neta total es la suma de las energías netas específicas por frecuencia, a saber

$$F_\nu = \lim \frac{\sum \Delta E_\nu}{\Delta A \Delta t \Delta\nu} = \frac{\int dE\nu}{dA dt d\nu},$$

en donde estamos integrando sobre todas las direcciones.

$$\Delta F = \frac{\Delta L_r}{\Delta A} = \frac{\Delta E}{\Delta A \Delta t \Delta\nu}$$

Usando la definición de la intensidad específica, arriba explicada, podemos definir **la densidad de flujo en términos de intensidad y ángulo sólido.** Tomamos en cuenta el teorema de Fubini (nota 7), según el cual podemos cancelar integrales de diferenciales en el nominador y denominador, siempre y cuando la variable en la integral restante no es una función de estas unidades. En este caso, la intensidad es una función del ángulo sólido y se cumple la condición.

[1803] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 81; George Rybicky & Alan Lightman, *Radiative Processes in Astrophysics* (1979): 3 (ec. 1.2), 4
[1804] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 81 (ec. 4.1)
[1805] David Gray, *The observation and analysis of stellar photospheres*, 2nd ed. (1992): 93

Además, en el caso de una radiación isotrópica, la intensidad es constante y, por lo tanto sale de la integral. Entonces, se sigue que: (nota 1806)

$$\Rightarrow F_\nu = \frac{\int_S dE}{\iint dAdt} = \frac{\iiint I_\nu \cos\theta dAd\omega dt}{\iint dAdt} = \frac{\int_S I_\nu \cos\theta d\omega \iint dAdt}{\iint dAdt} = \int_S I_\nu \cos\theta d\omega \,(\text{dimensión } Wm^{-2})$$

Ahora transferimos las coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas (x, y, z). Sea θ el ángulo formado por el vector normal del elemento $d\sigma = d\phi d\theta$ del cono y el vector normal $r = z$ del plano dA (en el plano xy) y sea ϕ el ángulo formado por el plano constituido por estos dos vectores normales y x. Al proyectar esta superficie en el plano xy del sistema de coordenadas x, y, z, se multiplica el área $d\theta d\phi$ con el vector de escala $rsen\theta$, que representa la distancia del área proyectada en el plano xy al eje z. En el caso de una esfera con radio unitario, este vector de escala se reduce a $rsen\theta = 1sen\theta = sen\theta$. Por lo tanto, en una esfera con radio unitario, *el área infinitesimal proyectada en el sistema de coordenadas x, y, z es: $d\sigma = d\omega = sen\theta d\theta d\phi$.*

Para calcular el flujo emitido por un centímetro cuadrado de la superficie de una estrella, partimos de la definición del flujo como función de la intensidad, con la siguiente sustitución de variables:
$u = \cos\theta$ y $du = -sen\theta d\theta$

Por lo tanto:

$$F_\nu = \int_{\phi=0}^{2\pi}\left[\int_{\theta=0}^{\pi} I_\nu \cos\theta sen\theta d\theta\right]d\phi = \int_0^{2\pi}\left[-\int_1^{-1} I_\nu u du\right]d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi\left[\int_{-1}^{1} I_\nu u du\right] = 2\pi\int_{-1}^{1} I_\nu u du$$

Ahora partimos $I_\nu(u)$ en dos partes, a saber, la intensidad hacia fuera de la estrella I_ν^{afuera}, cuando $u = \cos\theta > 0$, es decir, θ entre 0 y $\pi/2$ y la intensidad hacia adentro de la estrella, $I_\nu^{adentro}$, cuando $u = \cos\theta < 0$, es decir, θ entre 0 y π.

$$F_\nu = 2\pi\int_{-1}^{1} I_\nu u du = 2\pi\int_0^1 I_\nu^{afuera} u du + 2\pi\int_{-1}^{0} I_\nu^{adentro} u du = 2\pi I_\nu^{afuera}\left(\frac{1}{2}u^2\Big|_0^1\right) + 2\pi I_\nu^{adentro}\left(\frac{1}{2}u^2\Big|_{-1}^0\right)$$

Como la estrella se supone que esté aislada, se sigue que los fotones que entran hacía adentro son cero, es decir, $I_\nu^{adentro} = 0$, y, por lo tanto:

$$F_\nu = 2\pi I_\nu^{afuera}\left(\frac{1}{2}u^2\Big|_0^1\right) = \pi I_\nu$$ (nota 1807)

[1806] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 81 (ec. 4.2). Teorema de Fubin en James Stewart, *Calculus* (1994): 839. Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 81 (ec. 4.2) procede incorrectamente al dividir $\frac{1}{dA\,d\nu\,dt}$, que matemáticamente no es posible, pero algunos (astro)físicos lo hacen.

[1807] Elaborada con base en Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 82 (ecuaciones 4.3 & 4.4)

A.3. Luminosidad

Nos imaginamos una esfera con radio r y superficie $4\pi r^2$ en cuyo centro se encuentra una estrella con determinada luminosidad real. La **densidad de flujo F_v, a una frecuencia, por centímetro cuadrado de la superficie de la estrella** se define tal como lo hemos deducido arriba en A.2:

$F_v = \pi I_v$.

La energía total es la energía emitida por **toda** la superficie, por lo tanto hemos de multiplicar el flujo por $4\pi r^2$:

$F_v * 4\pi r^2 = \pi I_v * 4\pi r^2 = L_v$ (dimensión: $Jm^{-2}s^{-1}\ Hz^{-1} = Wm^{-2}Hz^{-1}$) (nota [1808])

Si integramos sobre todas las frecuencias, obtenemos la luminosidad total de la estrella:

$L = 4\pi^2 r^2 I$ (dimensión: $Jm^{-2}s^{-1} = Wm^{-2}$)

Por lo tanto, la energía detectada por un observador a distancia R de la estrella, con un detector con superficie de un centímetro cuadrado, es la energía total dividida entre $4\pi R^2$, es decir:

$$L_{obs} = \frac{L}{4\pi R^2} = \frac{4\pi r^2}{4\pi R^2}\pi I = \frac{r^2}{R^2}\pi I$$

Esta función nos da, indirectamente, una Manera de medir la distancia R a una estrella, a condición de que conozcamos ya la luminosidad L de la estrella por otros medios, o vice-versa, nos permite conocer su luminosidad, si conocemos por otros medios la distancia:

$R = \sqrt{\dfrac{L}{4\pi L_{obs}}}$ (dimensión: m) (nota [1809]) y

$L = 4\pi R^2 L_{obs}$

Veamos un ejemplo. Supongamos que una Cefeida lejana tiene una luminosidad real de $L = 4*10^{30} W$ cuya luz se recibe en un telescopio con una radio de dos metros y, por lo tanto, una superficie de $S = \pi r^2 = 4\pi$ metros cuadrados. La luminosidad observada es $L_{obs} = 4*10^{-8} W$. Por lo tanto, la luminosidad observada por metro cuadrado es: $L_{obs} / m^2 = \dfrac{4*10^{-8}}{4\pi} = \dfrac{10^{-8}}{\pi} Wm^{-2}$.

Por lo tanto, la distancia de la Cefeida es:

[1808] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 82 (ec. 4.5); Bradley Carroll & Dale Ostlie, *Modern Astrophysics* (1996): 67 (ec. 3.2)

[1809] John Hawley & Katherine Holcomb, *Foundations of Modern Cosmology* (1998): 270 (10.3)

$$R = \sqrt{\frac{4*10^{30}}{4\pi*(10^{-8}/\pi)}} = \sqrt{10^{38}} = 10^{19}\,m$$

A.4 Magnitud

La **magnitud aparente** es la razón entre la densidad de flujo F_r a distancia r de la fuente de luz y una densidad de flujo F_0 preseleccionada o 'estándar':

$$m_r - m_0 = -2.5\lg\frac{F_r}{F_0} \quad \text{(adimensional)}$$ ([nota 1810])

Obviamente, la diferencia de Magnitudes es cero cuando $F_r = F_0$, porque, dado que $\lg\frac{a}{b} = \lg a - \lg b$, se sigue que:

$$m_r - m_0 = -2.5\lg\frac{F_0}{F_0} = -2.5\lg(1) = 0$$

Por el signo negativo antes del operador $\lg$, se entiende que *mientras Mayor la Magnitud, menor la luminosidad observada*. Ejemplos: Sol: $m_S = -26.8$; Luna llena: $m_L = -12.5$; Sirius: $m_{Sirius} = -1.5$.

Definimos la **Magnitud absoluta** como la Magnitud a una distancia de 10 parsecs. Para calcular la diferencia entre la Magnitud observada a distancia r y la Magnitud absoluta a distancia de 10 parsecs, que es lo que se conoce como el **módulo de distancia,** es necesario recordar que $\lg\frac{a}{b} = \lg a - \lg b$ & $\lg a^n = n\lg a$

Por lo tanto:

$$m_r - M = (-2.5\lg\frac{F_r}{F_0}) - (-2.5\lg\frac{F_{10pc}}{F_0}) = -2.5(\lg\frac{F_r}{F_0} - \lg\frac{F_{10pc}}{F_0}) = -2.5(\frac{F_r/F_0}{F_{10pc}/F_0} = -2.5\lg\frac{F_r}{F_{10pc}}$$

$\Rightarrow$

$$m_R - M = -2.5\lg\frac{L_r/4\pi r^2}{L_r/4\pi(10pc)^2} = -2.5\lg(\frac{10pc}{r})^2 = -5\lg(\frac{10pc}{r}) = 5\lg(\frac{10pc}{r})^{-1} = 5\lg(\frac{r}{10pc}) \Rightarrow$$

$$m_r - M = 5\lg r - 5 \quad \text{(adimensional)}$$ ([nota 1811])

Si el espacio entre la fuente de radiación y el observador no está del todo vacío, entonces parte de la radiación es absorbida por el medio. El coeficiente de **extinción** o absorción α se define como la disminución de la intensidad dI a una distancia dR:

[1810] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003):84 (ec. 4.8); Bradley Carroll & Dale Ostlie, *Modern Astrophysics* (1996): 67 (ec. 3.4)

[1811] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 86 (ec. 4.11); Bradley Carroll & Dale Ostlie, *Modern Astrophysics* (1996): 68 (ec. 3.6)

$$dI = -\alpha I dR \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\alpha dR \Rightarrow \int_{I(0)}^{I(R)} I^{-1} dI = -\alpha \int_0^R dR \;\Rightarrow \ln(I)\Big|_{I(0)}^{I(R)} = -\alpha R \quad (\text{dimensión: } Js^{-1})$$

$$\Rightarrow \ln\frac{I(R)}{I(0)} = -\alpha R \Rightarrow I(R) = I(0)e^{-\alpha R} \quad (^{\text{nota } 1812})$$

donde $I(0)$ es la intensidad de la estrella en su superficie, e $I(R)$ la intensidad a una distancia R. Sustituyendo la última ec. en la penúltima, se obtiene:

$$m_r - M = -2.5\lg\frac{L/4\pi R^2}{L/4\pi(10pc)^2} = -2.5\lg\frac{L_{obs}}{L/4\pi(10pc)^2} 5\lg r - 5 \text{ (adimensional) } (^{\text{nota } 1813})$$

Recordemos:

$$L_{obs} = \frac{r^2}{R^2}\pi I$$

Ya atenuado, por la extinción, es:

$$L_{obs} = \frac{r^2}{R^2}\pi I(0)e^{-\alpha R}$$

Recuerda que $\lg a^b = b\lg a$, por lo tanto:

$$m_r - M = -2.5\lg\frac{\frac{r^2}{R^2}\pi I(0)e^{-\alpha R}}{\frac{r^2}{(10pc)^2}\pi I(0)} = -2.5\lg\frac{R^{-2}e^{-\alpha R}}{10^{-2}} = 2.5\lg R^2 - 2.5\lg 10^2 + 2.5\lg e^{\alpha R} = 5\lg R - 5 + A$$

en donde $A = 2.5\alpha R\lg e = 1.08575\alpha R$

B. MECANISMOS DE TRANSFERENCIA DE RADIACIÓN

B.1 Radiación de un cuerpo negro (*black body*)

Se define un 'cuerpo negro' como un objeto que no refleja ni dispersa la radiación que cae sobre él, sino que la absorbe totalmente y la re-emite totalmente. Un 'cuerpo negro' es una especie de radiador ideal que no existe en el mundo real, pero muchos objetos se comportan como si lo fueran. La radiación del 'cuerpo negro' depende únicamente de su temperatura, y es independiente de su forma, de su Material y estructura interna. La *distribución de las longitudes de onda* λ es una función de la temperatura nada más. La intensidad $I_{BB(\nu)}$ de la radiación del *black body* con frecuencia ν y temperatura T es:

[1812] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 87 (ec. 4.14) Bradley Carroll & Dale Ostlie, *Modern Astrophysics* (1996): 265 (ec. 9.11) define la absorción en términos de intensidad I : $dI = -\kappa I\rho dr$. normalmente, la intensidad es independiente de la distancia, pero cuando la radiación pasa por un medio que absorbe fotones, la intensidad disminuye con la distancia.

[1813] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 86 (ec. 4.11); Bradley Carroll & Dale Ostlie, *Modern Astrophysics* (1996): 68 (ec. 3.6)

$$I_{BB(\nu)} = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1}$$ (dimensión: $Wm^{-2}Hz^{-1}sr^{-1} = Jm^{-2}sr^{-1}$) ([nota 1814])

en donde:
la constante de Planck: $h = 6.6256*10^{-34}\,Js$
la velocidad de la luz: $c = 3*10^{8}\,ms^{-1}$
la constante de Boltzmann: $k = 1.38*10^{-23}\,JK^{-1}$

Podemos escribir la ley de Planck también como una función de la longitud de onda. Dado que:
$\nu = c/\lambda = c\lambda^{-1}$

se sigue que:
$$\frac{d\nu}{d\lambda} = c(-\lambda^{-2}) = -\frac{c}{\lambda^2}$$ ([nota 1815])

Dado que, además:
$I_{BB(\nu)}d\nu = -I_{BB(\lambda)}d\lambda$,

se sigue que:
$$I_{BB(\lambda)} = -I_{BB(\nu)}\frac{d\nu}{d\lambda} = I_{BB(\nu)}\frac{c}{\lambda^2} = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1}\frac{c}{\lambda^2} = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)}-1}$$ ([nota 1816]).

B.2 La relación entre luminosidad y temperatura

Integrando, obtenemos:

$$I_{BB} = \int_0^\infty I_{BB(\nu)}d\nu = AT_e^{\,4},$$

en donde $A = \frac{2k^4}{c^2h^2}\frac{\pi^4}{15}$,

de modo que, si sustituimos $\pi A = \sigma$:
$L_r = 4\pi R\ \pi A T_e^{\,4} = 4\pi R^2 \sigma T_e^{\,4}$ (dimensión: $W = Js^{-1}$ & $\sigma = 5.67*10^{-8}\,Wm^{-2}K^{-4}$)

Por lo tanto, en la superficie de una estrella con radio R:
$$F_R = \frac{L_r}{4\pi R^2} = \sigma T_e^{\,4}$$ ([nota 1817]),

de modo que la densidad de flujo a una distancia r es:

[1814] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 101 (ec. 5.12); ver para toda esta sección también Bradley Carroll & Dale Ostlie, *Modern Astrophysics* (1996): 75-82
[1815] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 101 (ec. 5.13)
[1816] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 101 (ec. 5.14 & ec. 5.15)
[1817] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 102-103 (ecuaciones 5.19 & 5.25)

$$F_r = \frac{L_r}{4\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2}F_R = \frac{R^2}{r^2}\sigma T_e^{\,4}$$ (nota 1818)

Para gases ideales, vale **la ley de gases ideales**, que establece una relación directa entre temperatura y presión:
$PV = NkT_k$ (dimensión: J) (nota 1819)

Dado que el número de partículas en un gas es $n = N/V$, se sigue que:
$P = nkT_k$ (dimensión: $Nm^{-2} = kgm^{-1}s^{-2} = 10gcm^{-1}s^{-2}$) (nota 1820)

Por lo tanto, la temperatura cinética $T_k = (\frac{1}{2}mv^2)/(\frac{3}{2}k) = \frac{mv^2}{3k}$ (dimensión: $\frac{gcm^2}{JK^{-1}s^2} = K$) (nota 1821).

B.3 La relación entre luminosidad y Masa

Con base en observaciones empíricas de estrellas binarias con Masa conocida, se obtiene la siguiente relación empírica entre Masa y luminosidad:
$L_r \cong M^{3.8}$ (nota 1822)

C. MASA, PRESIÓN, FUERZA GRAVITACIONAL Y COLAPSO

C.1 El teorema virial

En el apéndice II obtuvimos las ecuaciones de la energía cinética K y la energía potencial gravitacional U_g:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\frac{dr}{dt})^2$$

$$U_g = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

En un sistema de muchos objetos, la relación entre energía cinética y energía gravitacional potencial es la siguiente (la comprobación de este teorema es complicada):

$$K = -\frac{1}{2}U_g$$ (nota 1823)

C.2 El nacimiento de una estrella y la Masa de Jeans

1818 Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 103 (ec. 5.26)
1819 Jay Orear, *Física* (1989): 264 (ec. 12-5); Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 141 (ec. 7.11)
1820 Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 105 (ec. 5.34)
1821 Jay Orear, *Física* (1989): 266 (ec. 12-8); Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 105 (ec. 5.33)
1822 Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 211 (ec. 8.1)
1823 Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 123 (ec. 6.50)

Una estrella nace cuando una nube de gas tiene Masa suficiente para que su peso supere la fuerza de la presión. Esta nube está formada de partículas de hidrógeno y helio del *Big Bang* o de las partículas restantes de estrellas de una generación anterior que murieron en una supernova.

Esta Masa crítica que genera el colapso gravitacional de una nube de gas, depende, obviamente, de la presión P, la densidad ρ, la constante gravitacional G y una constante adimensional C. Se llama ***la Masa de Jeans***:

$M_c = CP^a G^b \rho^c$

(dimensiones: $(kg^1 m^{-1} s^{-2})(kg^{-1} m^3 s^{-2})(kg^1 m^{-3}) = (kg^{(a-b+c)} m^{(-a+3b-3c)} s^{(-2a-2b+0c)})$

Dado que el resultado final debe dar una Masa en kilogramos, podemos resolver los exponentes a, b y c de la fórmula de arriba.

$a - b + c = 1$

$-a + 3b - 3c = 0$

$-2a - 2b = 0$,

lo que nos da $a = 3/2$, $b = -3/2$ y c=-2.

Esto nos da la siguiente ec. de la Masa crítica:

$M_c = C \dfrac{P^{3/2}}{G^{3/2} \rho^2}$ (dimensión: kg) (nota 1824)

C.3 Los equilibrios de una estrella

Supongamos en una estrella un volumen dV con superficie dA y altura dr, de modo que $dV = dAdr$. La Masa de las partículas contenidas en este volumen es $dm = \rho_r dAdr$, en donde ρ_r es la densidad ρ del gas a una distancia r del centro de la estrella. Por lo tanto, la fuerza gravitacional ejercida sobre las partículas contenidas por este volumen es:

$$dF_g = -\frac{GM_r dm}{r^2} = -\frac{GM_r \rho_r}{r^2} dAdr$$

Supongamos que la presión en la superficie inferior del volumen es P y en la superficie superior, donde es menor $P + dP$. La fuerza ejercida por la presión es, entonces:

$dF_p = PdA - (P + dP)dA = -dPdA$,

en donde $dP < 0$, de modo que $-dPdA > 0$

La estrella está en **equilibrio hidrostático** de fuerza gravitacional y fuerza de presión cuando la fuerza total ejercida por ambas fuerzas es cero:

$$dF_g + dF_p = -\frac{GM_r \rho_r}{r^2} dAdr - dPdA = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r \rho_r}{r^2}$$ (dimensión: $kgm^{-2}s^{-2}$)(nota 1825)

[1824] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 123 (ec. 6.52)

[1825] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 221 (ec. 10.1); Bradley Carroll & Dale Ostlie, *Modern Astrophysics* (1996): 318 (ec. 10.7)

La Masa de una rebanada de la esfera, a una distancia r del centro de la misma, con radio dr es el producto del volumen de esta rebanada de la esfera, multiplicada por la densidad (ρ que es Masa por volumen):

$$dV = \frac{4}{3}\pi\{(r+dr)^3 - r^3\} = 4\pi(r^2dr + rdr^2 + \frac{1}{3}dr^3) \cong 4\pi r^2 dr$$

Por lo tanto, la Masa de esta rebanada es el producto del volumen dV y la densidad ρ:

$dM_r \cong 4\pi r^2 \rho dr$ (dimensión: g)

De esta ec. se deduce **la ec. de conservación de Masa**:

$\frac{dM_r}{dr} \cong 4\pi r^2 \rho$ (dimensión: kgm^{-1}) (nota 1826)

Una tercera condición de equilibrio concierne la producción de energía en la estrella. La ley de la conservación de energía requiere que toda energía que se produce en la estrella, sea radiada hacia afuera. Se define el coeficiente de producción de energía en la estrella, por unidad de tiempo y por unidad de Masa, como ε (dimensión: $Jkg^{-1}s^{-1}$). Se define el diferencial del flujo de energía en la rebanada de la esfera arriba definida como (energía que es producida y radiada hacia afuera):

$dL_r = L_{r+dr} - L_r = \varepsilon dM_r \cong 4\pi r^2 \rho \varepsilon dr$

Por lo tanto, **la ec. de conservación de energía** (su producción y sucesiva radiación hacia afuera) es:

$\frac{dL_r}{dr} \cong 4\pi r^2 \rho \varepsilon$ (dimensión: $Jm^{-1}s^{-1} = Wm^{-1}$) (nota 1827)

La cuarta ec. de equilibrio nos da la temperatura T como una función del radio r de la estrella. Ahora bien, definimos la opacidad o el coeficiente de absorción a_v como el producto de la absorción por unidad de Masa κ_v, la emisión j_v y la densidad ρ. La ec. de transporte de radiación es:

$\frac{dI_v}{dr} = -\kappa_v \rho I_v + j_v$ (nota 1828).

Expresando la intensidad I_v con la función de Planck; la absorción como promedio de todas las frecuencias; y la emisión según la segunda ley de Kirchhoff, la ec. anterior se transforma en la siguiente:

[1826] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 221 (ec. 10.2); Bradley Carroll & Dale Ostlie, *Modern Astrophysics* (1996): 319 (ec. 10.8)

[1827] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 222 (ec. 10.3); Bradley Carroll & Dale Ostlie, *Modern Astrophysics* (1996): 342 (ec. 10.45)

[1828] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 223 (ec. arriba izquierda) corregida según Bradley Carroll & Dale Ostlie, *Modern Astrophysics* (1996): 282 (ec. 9.28).

$$\frac{4\pi}{3}\frac{d}{dr}\left(\frac{ac}{4\pi}T^4\right) = -\kappa\rho F_r = -\kappa\rho\frac{L_r}{4\pi r^2} \Rightarrow \frac{acT^3}{3}\frac{dT}{dr} = -\kappa\rho\frac{L_r}{4\pi r^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho}{4acT^3}\frac{L_r}{4\pi r^2}$$ (dimensión: Km^{-1}) ([nota 1829])

en donde a es la constante de radiación, c la velocidad de la luz, ρ la densidad y κ es la absorción promedia de Rosseland. Ésta es **la ec. del gradiente de temperatura, en caso de que la energía es transportada por radiación**. La **ec. del gradiente de temperatura, en el caso de que la energía es transportada por convección (o adiabática),** es la siguiente:

$$\frac{dT}{dr} = (1 - 1/\gamma)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr}$$ (dimensión: Km^{-1}) ([nota 1830])

en donde P es la presión y γ, el exponente adiabática, que equivale el ratio del calor específico con presión constante y el calor específico con volumen constante ($\gamma = C_P / C_V$).

[1829] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003):222 (ec. 10.4); Bradley Carroll & Dale Ostlie, *Modern Astrophysics* (1996): 351 (ec. 10.61)

[1830] Hannu Karttunen, *Fundamental Astronomy* (2003): 223 (ec. 10.7); Bradley Carroll & Dale Ostlie, *Modern Astrophysics* (1996): 356 (ec. 10.80)